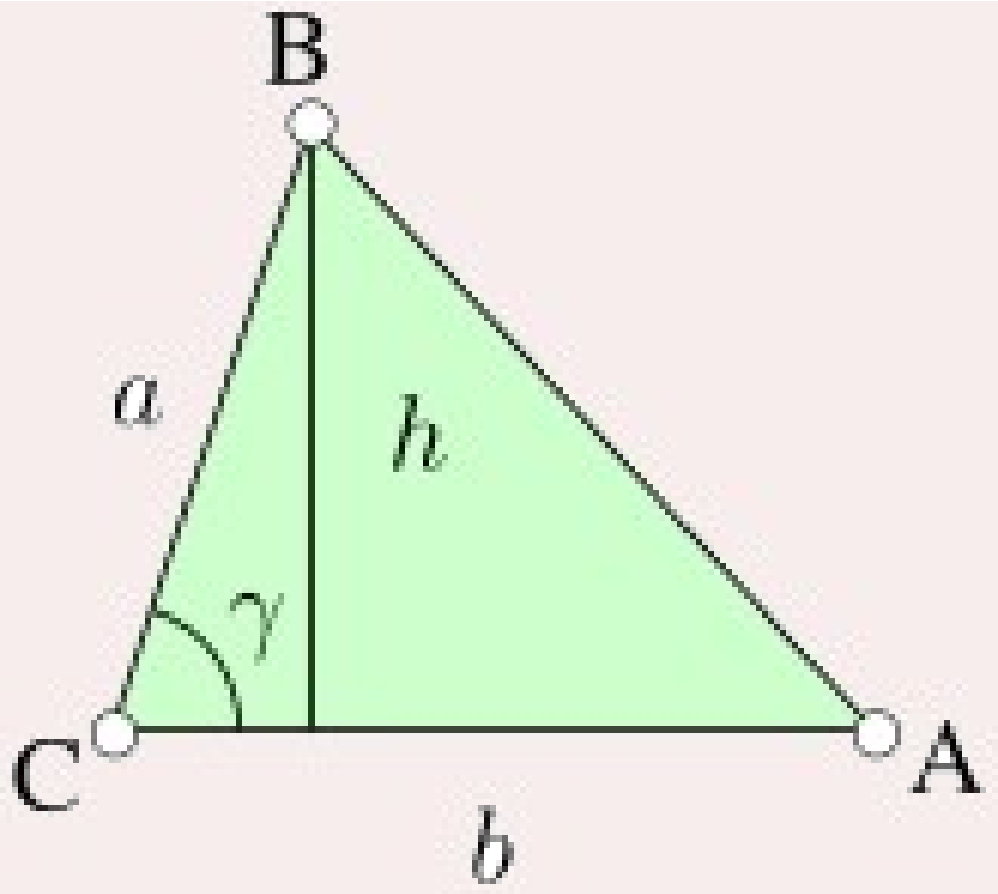
MATEMATICA
IV GINNASIO



WIKIPEDIA
L'enciclopedia libera

CC BY SA

NOTE GENERALI SUL PROGETTO “LIBRI DI TESTO”

Questo è un progetto che avevo in mente di attuare da tempo: provare ad usare il materiale presente su Wikipedia e progetti correlati per creare dei libri di testo liberi per le scuole; tuttavia, a seguito di una discussione che ho intrapreso con altri utenti nel bar di Wikipedia è emerso che a quanto ho capito non esiste più un vero e proprio "programma ministeriale" per le scuole superiori. Ho capito inoltre che oggigiorno ogni scuola va abbastanza per conto suo nella definizione dei programmi di corso, motivo per cui è praticamente impossibile creare dei testi "standard" validi ovunque (e ci sarebbe da chiedersi perchè questa grande "libertà" è spesso correlata ai testi iperspecifici per ogni classe che i docenti adottano per i loro corsi... testi di cui spesso sono anche autori! :D). A questo problema si aggiunge il già citato iperspecialismo di volte voci che in molti casi può dare problemi ed il fatto che i testi sono spesso strutturati da un punto di vista più "didattico".
Ad ogni modo ho deciso comunque di proseguire il progetto per una serie di ragioni che illustro qui sotto, creando solo i testi del Liceo Classico da utilizzare come esempio pratico:

•fornire dei testi utilizzabili in quei contesti ove i testi "ufficiali" siano troppo costosi (es. terzo mondo)
•dimostrare la fattibilità del progetto a grandi linee
•fornire una critica all'attuale sistema di creazione dei programmi di corso e dei libri di testo scolastici. Davvero la "libertà editoriale" come è propagandata oggi tutela gli studenti e le famiglie? (Non dico che bisogna tornare al "testo unico" del ventennio, ma sarebbe interessante quantomeno studiare i conflitti di interesse nella creazione e nell'utilizzo dei testi)
•mostrare come la "massa" possa autogestire la creazione dei testi scolastici indipendentemente dagli editori e fornendo testi di qualità e gratuiti, oltre che più aderenti ad un punto di vista neutrale.
Per vari testi liberi relativi alla Letteratura Italiana, antica e straniera per tutti gli anni del corso si rimanda al progetto WikiSource o ad archive.org.

Galati Antonello

Numero intero

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

*Disambiguazione – Se stai cercando informazioni sul tipo di dato utilizzato in informatica, vedi **Numero intero (informatica)**.*

I **numeri interi** (o **numeri interi relativi** o, semplicemente, **numeri relativi**) corrispondono all'insieme ottenuto unendo i numeri naturali (0, 1, 2, ...) e i numeri interi negativi (−1, −2, −3,...), cioè quelli ottenuti ponendo un segno "−" davanti ai naturali. Questo insieme in matematica viene indicato con $\mathbf{Z}$ o $\mathbb{Z}$, perché è la lettera iniziale di "*Zahl*" che in tedesco significa numero (originariamente "far di conto", infatti l'espressione implica l'utilizzo dei numeri negativi).

Il simbolo dell'insieme dei numeri interi

Gli interi vengono quindi definiti esattamente come l'insieme dei numeri che sono il risultato tra sottrazioni di numeri naturali. I numeri interi possono essere sommati, sottratti e moltiplicati e il risultato rimane un numero intero. L'inverso di un numero intero non è però un intero in generale, ma un numero razionale; formalmente questo fatto si esprime dicendo che $\mathbb{Z}$ è un anello commutativo, ma non un campo.

Indice

Proprietà algebriche
- Gruppo
- Anello
- Algoritmo di Euclide
- Cardinalità

Ordinamento

Definizione formale
- Operazioni

Voci correlate

Altri progetti

Collegamenti esterni

Proprietà algebriche

Come i numeri naturali, $\mathbb{Z}$ è *chiuso* rispetto alle operazioni di addizione e di moltiplicazione, cioè la somma o il prodotto di due interi è un intero. Inoltre, con l'inclusione dei numeri naturali negativi e dello zero, $\mathbb{Z}$ (a differenza dei numeri naturali) è chiuso anche rispetto all'operazione di sottrazione: se a e b sono interi,

anche $a - b$ lo è. Tuttavia, $\mathbb{Z}$ non è chiuso sotto l'operazione di divisione, poiché il quoziente di due interi (per esempio $1/2$) non è necessariamente un numero intero.

La tabella seguente elenca alcune delle proprietà di base dell'addizione e della moltiplicazione per ogni intero a, b e c.

	addizione	moltiplicazione
chiusura:	$a + b$ è un intero	$a \times b$ è un intero
proprietà associativa:	$a + (b + c) = (a + b) + c$	$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$
proprietà commutativa:	$a + b = b + a$	$a \times b = b \times a$
esistenza dell'elemento neutro:	$a + 0 = a$	$a \times 1 = a$
esistenza dell'elemento opposto:	$a + (-a) = 0$	
proprietà distributiva:	$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$	

Gruppo

Nel linguaggio dell'algebra astratta, le prime cinque proprietà elencate sopra per l'addizione dicono che $\mathbb{Z}$ è un gruppo abeliano con l'operazione *somma*. In particolare, $\mathbb{Z}$ è un gruppo ciclico, poiché ogni intero non nullo può essere scritto sommando un certo numero di volte $1 + 1 + \ldots + 1$ oppure $(-1) + (-1) + \ldots + (-1)$. Il gruppo $\mathbb{Z}$ è l'*unico* gruppo ciclico infinito, nel senso che ogni altro gruppo ciclico infinito è isomorfo a $\mathbb{Z}$.

Anello

Le prime quattro proprietà elencate sopra per la moltiplicazione dicono che $\mathbb{Z}$ con l'operazione *prodotto* forma un monoide commutativo. Tuttavia, si nota che non tutti gli interi hanno un inverso rispetto alla moltiplicazione; per esempio non esiste un intero x tale che $2x = 1$. Quindi $\mathbb{Z}$ non è un gruppo se considerato con l'operazione *prodotto*.

Tutte le proprietà dalla tabella prese insieme dicono che $\mathbb{Z}$ con l'addizione e la moltiplicazione è un anello commutativo con unità. In effetti $\mathbb{Z}$ è la motivazione principale per la definizione di tale struttura. La mancanza dell'inverso rispetto alla moltiplicazione è tradotta nel fatto che $\mathbb{Z}$ non è un campo.

L'anello $\mathbb{Z}$ è inoltre un dominio d'integrità, perché non contiene divisori dello zero. Ogni dominio di integrità è contenuto in un campo, e il più piccolo campo contenente gli interi è il campo $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali.

Algoritmo di Euclide

🔎 *Lo stesso argomento in dettaglio:* ***Algoritmo di Euclide*** *e* ***Teorema fondamentale dell'aritmetica***.

Anche se la divisione ordinaria non è definita su $\mathbb{Z}$, è possibile usare l'algoritmo di Euclide per effettuare una divisione con resto: dati due interi a e b con $b \neq 0$, esistono e sono unici due interi q e r tali che

$$a = q \times b + r \text{ con } 0 \leq r < |b|,$$

dove $|b|$ è il valore assoluto di b. L'intero q è chiamato il *quoziente* e r è chiamato il *resto*, risultanti dalla divisione di a con b.

L'algoritmo di Euclide mostra come due numeri interi abbiano sempre un massimo comune divisore ed un minimo comune multiplo. Inoltre, per il teorema fondamentale dell'aritmetica ogni numero intero ha un'unica decomposizione come prodotto di numeri primi. L'esistenza dell'algoritmo di Euclide fa di $\mathbb{Z}$ un anello euclideo.

Cardinalità

La cardinalità di un insieme di interi è equivalente a $\aleph_0$ (aleph-zero). Ciò è dimostrabile tramite la costruzione di una corrispondenza biunivoca (ovvero una funzione sia iniettiva che suriettiva) fra $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{N}$. Considerando $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, tale corrispondenza è la funzione $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ tale che:

$$f(x) = \begin{cases} 2|x|, & \text{se } x < 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ 2x - 1, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Mentre considerando $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$ è la funzione $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}^+$ tale che:

$$g(x) = \begin{cases} 2|x|, & \text{se } x < 0 \\ 2x + 1, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Ogni membro di $\mathbb{Z}$ avrà uno ed un solo membro corrispondente in $\mathbb{N}$ (o $\mathbb{N}^+$), pertanto i due insiemi hanno la stessa cardinalità.

Ordinamento

L'insieme $\mathbb{Z}$ è un insieme totalmente ordinato senza estremo superiore o inferiore. L'ordine di $\mathbb{Z}$ è dato da

$$\ldots < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < \ldots$$

Un numero intero è **positivo** se è maggiore dello zero e **negativo** se minore di zero; zero non è considerato un numero positivo né negativo.

L'ordine seguente è compatibile con le regole dell'algebra:

1. se $a < b$ e $c < d$, allora $a + c < b + d$;
2. se $a < b$ e $c > 0$, allora $ac < bc$.

Definizione formale

Più semplicemente: se m e n sono due qualsiasi numeri relativi si dice che m è maggiore di n, e si scrive $m > n$, se esiste un numero naturale $p \neq 0$ tale che $m = n + p$. L'insieme $\mathbb{Z}$ può essere definito a partire dall'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali tramite il concetto di insieme quoziente. Si consideri il prodotto cartesiano $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, ovvero l'insieme di tutte le coppie ordinate di numeri naturali (a, b). Si consideri la seguente relazione $\sim$

$$(a, b) \sim (a', b') \Leftrightarrow a + b' = a' + b.$$

Questa è una relazione di equivalenza, infatti è:

- riflessiva: $(a,b) \sim (a,b)$, infatti $a+b=a+b$
- simmetrica: se $(a,b) \sim (a',b')$ con $a+b'=a'+b$, allora $a'+b=a+b'$ e quindi $(a',b') \sim (a,b)$
- transitiva: se $(a,b) \sim (a',b')$ e $(a',b') \sim (a'',b'')$, allora

$$
\begin{aligned}
&a+b'=a'+b, a'+b''=a''+b', \text{sommando} \\
&a+b'+a'+b''=a'+b+a''+b', \text{semplificando} \\
&a+b''=a''+b, \text{quindi} \\
&(a,b) \sim (a'',b'')
\end{aligned}
$$

Si definisce $\mathbb{Z}$ come l'insieme quoziente di $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ con la relazione $\sim$:

$$\mathbb{Z} = (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) / \sim$$

A questo punto è facile dimostrare che ogni classe di equivalenza $[(a,b)]$ contiene uno e un solo elemento nella forma (a',b') con $a'=0$ oppure $b'=0$. In questo modo possiamo introdurre la notazione più familiare per i numeri interi nel modo seguente:

- $a = +a = [(a,0)]$
- $-a = [(0,a)]$
- $0 = -0 = [(0,0)]$

Si dimostra facilmente che esiste un isomorfismo tra l'insieme dei numeri naturali e il sottoinsieme di $\mathbb{Z}$ costituito dagli elementi del tipo $[(a,0)]$. In questo senso si può dire che i numeri naturali sono un sottoinsieme dei numeri interi.

Operazioni

Le operazioni di somma e prodotto possono essere definite nel modo seguente:

$$
\begin{aligned}
&(n_1,n_2)+(m_1,m_2)=(n_1+m_1,n_2+m_2) \\
&(n_1,n_2)\times(m_1,m_2)=(n_1m_1+n_2m_2,n_1m_2+m_1n_2)
\end{aligned}
$$

Si verifica che le operazioni sono compatibili con la relazione d'equivalenza, e che si traducono nelle normali operazioni di somma e prodotto degli interi tramite la notazione appena introdotta. Ad esempio:

$$a \times (-b) = [(a,0) \times (0,b)] = [(0,ab)] = -ab.$$

Si può anche dimostrare direttamente che l'insieme $\mathbb{Z}$ con queste operazioni è un anello commutativo.

Voci correlate

- Fattorizzazione
- 1 (numero)
- Intero di Gauss
- Intero di Eisenstein
- Intero di Blum

- Intero algebrico
- Numero naturale
- Numero razionale
- Numero reale
- Numero complesso
- *On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*
- Partizione di un intero

Altri progetti

- Wikimedia Commons (https://commons.wikimedia.org/wiki/?uselang=it) contiene immagini o altri file su **numero intero (https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Integers?uselang=it)**

Collegamenti esterni

-
- (EN) *Numero intero*, su *Enciclopedia Britannica*, Encyclopædia Britannica, Inc.
- (EN) Eric W. Weisstein, *Numero intero*, su *MathWorld*, Wolfram Research.

Controllo di autorità	Thesaurus BNCF 23876 (https://thes.bncf.firenze.sbn.it/termine.php?id=23876) · GND (DE) 4134668-3 (https://d-nb.info/gnd/4134668-3) · NDL (EN, JA) 00570428 (https://id.ndl.go.jp/auth/ndlna/00570428)

Estratto da "https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Numero_intero&oldid=125451856"

Questa pagina è stata modificata per l'ultima volta il 3 feb 2022 alle 22:10.

Il testo è disponibile secondo la licenza Creative Commons Attribuzione-Condividi allo stesso modo; possono applicarsi condizioni ulteriori. Vedi le condizioni d'uso per i dettagli.

WIKIPEDIA

Potenza (matematica)

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

*Disambiguazione – Se stai cercando il concetto di potenza di un insieme nella teoria degli insiemi, vedi **Cardinalità**.*

Questa voce o sezione sull'argomento matematica non cita le fonti necessarie o quelle presenti sono insufficienti.

In matematica, la **potenza** è un'operazione che associa a una coppia di numeri a e n, detti rispettivamente base ed esponente, il numero dato dal prodotto di n fattori uguali ad a:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ volte}}$$

in questo contesto a può essere un numero intero, razionale o reale mentre n è un numero intero positivo. Con opportune ipotesi su a è possibile considerare anche altri valori numerici per gli esponenti, ad esempio esponenti interi (anche non positivi), razionali o reali.

Le potenze scritte nella forma a^n si leggono "a elevato alla n" o più semplicemente "a alla n". L'esponente è usualmente rappresentato come apice immediatamente a destra della base.

Indice

- Peculiarità ed esempi
- Proprietà
- Radici ed esponenti frazionari
- Potenze ad esponente reale
- Voci correlate
- Altri progetti
- Collegamenti esterni

Peculiarità ed esempi

Alcuni esponenti hanno un loro nome. L'esponente due è spesso indicato come "al quadrato" (un numero alla seconda rappresenta l'area di un quadrato che abbia per lato quel valore) e l'esponente 3 come "al cubo" (un numero alla terza rappresenta il volume di un cubo che abbia per spigolo quel valore).

Esempi:

- $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$ si legge "tre alla seconda" oppure "tre al quadrato"
- $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 4 \cdot 2 = 8$ si legge "due alla terza" oppure "due al cubo"

- $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 9 \cdot 9 = 81$ si legge "tre alla quarta" oppure "tre elevato alla quarta"
- $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ si legge "un mezzo alla terza" oppure "un mezzo al cubo"

L'operazione si estende a $n = 0$ ponendo per ogni $a \neq 0$

$$a^0 = 1,$$

(nel caso in cui $n = 0$ e $a = 0$ l'operazione non è definita: non esiste 0^0)

e a n negativi ponendo

$$a^{-k} = \frac{1}{a^k}.$$

Ad esempio,

$$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = 0,001.$$

Proprietà

Le seguenti proprietà sono di immediata verifica nel caso in cui gli esponenti siano numeri interi positivi:

- Il prodotto di due, o più potenze aventi la stessa base, è una potenza che ha per base la stessa base e come esponente la somma degli esponenti:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

Dimostrazione

$$a^{n+m} = \prod_{k=1}^{n+m} a = \prod_{k=1}^{n} a \cdot \prod_{k=n+1}^{n+m} a$$

ma ricordiamo che

$$\prod_{k=n+1}^{n+m} a = \prod_{k=1}^{m} a$$

quindi

$$a^{n+m} = \prod_{k=1}^{n+m} a = \prod_{k=1}^{n} a \cdot \prod_{k=1}^{m} a = a^n a^m$$

- Il quoziente di potenze aventi la stessa base, è una potenza che ha per base la stessa base e come esponente la differenza degli esponenti:

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}.$$

Dimostrazione

$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{a \cdot a^{n-1}}{a \cdot a^{m-1}} = \frac{a \cdot a \cdot a^{n-2}}{a \cdot a \cdot a^{m-2}}$$

Estraendo fino ad avere a^m otteniamo il seguente risultato: $\frac{a^m \cdot a^{n-m}}{a^m \cdot a^{m-m}} = \frac{a^{n-m}}{a^0} = a^{n-m}$

- La potenza di una potenza è una potenza in cui la base rimane la stessa e l'esponente è dato dal prodotto degli esponenti:

  $(a^n)^m = a^{n \cdot m} = (a^m)^n.$
  NB: $(a^m)^n \neq a^{m^n} = a^{(m^n)}$; infatti, ad esempio, $(10^{10})^{100} = 10^{1000}$ è formato da un 1 seguito da 1000 zeri, mentre $10^{10^{100}} = 10^{(10^{100})}$ è formato da un 1 seguito da 10^{100} zeri.

- Il prodotto di potenze con lo stesso esponente è una potenza che ha per esponente lo stesso esponente e per base il prodotto delle basi:

  $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n.$

Dimostrazione

Espandiamo le potenze come prodotti e applichiamo la proprietà commutativa per a e b

$$a \cdot a \cdots a \cdot b \cdot b \cdots b = a \cdot b \cdot a \cdot b \cdots a \cdot b.$$

Otteniamo sempre un prodotto di a e b per n volte cioè

$$a^n \cdot b^n = \underbrace{a \cdot b \cdot a \cdot b \cdots a \cdot b}_{n \text{ volte}} = (a \cdot b)^n.$$

- Il quoziente di potenze con lo stesso esponente è una potenza che ha per esponente lo stesso esponente e per base il quoziente delle basi:

  $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

Dimostrazione

Espandiamo le potenze come prodotti e separiamo le frazioni

$$\frac{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}{b \cdot b \cdot b \cdot \cdots \cdot b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \cdots \cdot \frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

Notiamo che la definizione $a^0 = 1$ risulta ora più comprensibile poiché è consistente con le proprietà appena viste, infatti:

$$\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0 = 1.$$

Si noti che a^0 è un prodotto vuoto e pertanto è uguale a 1.

E lo stesso vale per la definizione di a^{-x}, infatti:

$$a^{-x} = a^{0-x} = \frac{a^0}{a^x} = \frac{1}{a^x}.$$

Radici ed esponenti frazionari

Dato un numero reale non negativo a e un numero intero positivo n, si chiama radice n-esima di a quel numero reale non negativo b tale che $b^n = a$, tale numero si indica con $\sqrt[n]{a}$.

Da questa definizione si ha subito che

$$(\sqrt[n]{a})^n = a,$$

per ogni numero reale non negativo a. Quindi è ragionevole (in virtù delle proprietà delle potenze) porre

$$a^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{a}.$$

In questo modo le proprietà delle potenze sono ancora rispettate, infatti

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n := a^{\frac{1}{n} \cdot n} = a^1 = a,$$

come avviene per la radice n-esima.

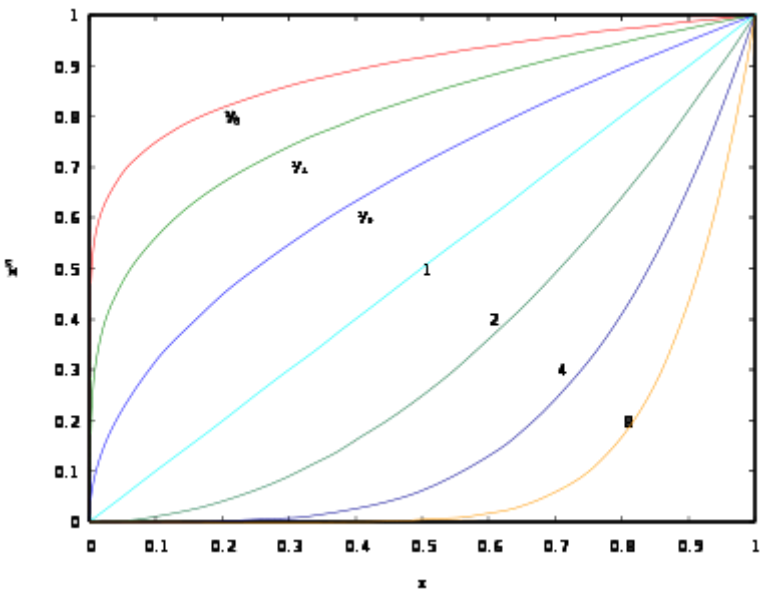


Grafico di funzioni x^a per esponenti maggiori di 1 (sotto la bisettrice degli assi), e minori di 1 (sopra la bisettrice)

Più in generale la definizione di potenza può essere estesa ulteriormente, con alcune restrizioni, consentendo all'esponente di essere un numero razionale $\frac{x}{y}$, con x e y interi primi tra loro e $y \neq 0$, se si pone:

$$a^{\frac{x}{y}} := \sqrt[y]{a^x}.$$

In questo caso:

- se y è pari, la potenza è definita per a reale non negativo;
- se y è dispari:
  - se x è positivo, la potenza è definita per qualsiasi a;
  - se x è non positivo, la potenza è definita per qualsiasi a non nullo.

Trascurando tali restrizioni e l'ipotesi x e y primi tra loro si cade in assurdi quali:

$$-1 = \sqrt[3]{-1} = (-1)^{\frac{1}{3}} = (-1)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-1)^2} = \sqrt[6]{1} = 1$$

Il passaggio errato è il terzo, in quanto $(-1)^{\frac{2}{6}}$ non è definito in $\mathbb{R}$.

Potenze ad esponente reale

È possibile estendere la definizione dell'operazione di elevamento a potenza anche ai casi in cui base ed esponente sono dei generici numeri reali (con la base però sempre positiva) facendo in modo che si conservino le regole di operazione tra potenze e che la funzione potenza risultante sia una funzione continua, e questa estensione è unica. Si può in tal modo dare senso a espressioni come $3^{\sqrt{2}}$ o e^{π}.

Definiamo inizialmente a^b con la base $a > 1$ e l'esponente $b > 0$, entrambi numeri reali.

Possiamo scrivere b nella sua rappresentazione in base 10 con la scrittura:

$$b = b_0, b_1 b_2 b_3 b_4 \dots$$

La successione β_n dei numeri

$$\begin{aligned}
&\beta_0 = b_0 \\
&\beta_1 = b_0, b_1 \\
&\beta_2 = b_0, b_1 b_2 \\
&\beta_3 = b_0, b_1 b_2 b_3 \\
&\dots
\end{aligned}$$

è una successione di numeri razionali crescente che tende a b.

La potenza a^{β_n} ha esponente razionale, quindi è stata definita.

La successione di numeri reali

$$\begin{aligned}
&a^{\beta_0} \\
&a^{\beta_1} \\
&a^{\beta_2} \\
&\dots
\end{aligned}$$

è una successione anch'essa crescente (poiché $a > 1$), risulta quindi naturale definire il valore di a^b come l'estremo superiore di tale successione:

$$a^b := \sup_n \{a^{\beta_n}\}.$$

Nel caso in cui la base fosse un numero compreso tra 0 e 1 si può definire:

$$a^b := ((a^{-1})^b)^{-1},$$

poiché a^{-1} in questo caso è maggiore di 1 e quindi il secondo membro è definito.

Difatti, essendo $a^b = ((a^{-1})^b)^{-1} = ((a^{-1})^{-b})$, si ha la seguente successione di numeri reali (considerando β_n come prima):

$$(a^{-1})^{-\beta_0}$$

$(a^{-1})^{-\beta_1}$
$(a^{-1})^{-\beta_2}$
$\dots$

che è una successione decrescente e quindi si può porre, in questo caso, $a^b := \inf_n \{(a^{-1})^{-\beta_n}\}$.

Voci correlate

- Moltiplicazione
- Radicale (matematica)
- Logaritmo
- Potenza di due
- Potenza di matrice
- Potenza di un punto
- Funzione esponenziale
- Equazione $x^y = y^x$

Altri progetti

- Wikiversità contiene risorse su **potenza**
- Wikimedia Commons (https://commons.wikimedia.org/wiki/?uselang=it) contiene immagini o altri file su **potenza (https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Exponentiation?uselang=it)**

Collegamenti esterni

-
- (EN) Eric W. Weisstein, *Potenza*, su *MathWorld*, Wolfram Research.

Controllo di autorità	LCCN (EN) sh85046490 (http://id.loc.gov/authorities/subjects/sh85046490) · J9U (EN, HE) 987007562810505171 (http://uli.nli.org.il/F/?func=find-b&local_base=NLX10&find_code=UID&request=987007562810505171)

Estratto da "https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Potenza_(matematica)&oldid=133216425"

Questa pagina è stata modificata per l'ultima volta il 27 apr 2023 alle 20:04.

Il testo è disponibile secondo la licenza Creative Commons Attribuzione-Condividi allo stesso modo; possono applicarsi condizioni ulteriori. Vedi le condizioni d'uso per i dettagli.

WIKIPEDIA

Polinomio

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

In matematica un **polinomio** è un'espressione composta da costanti e variabili combinate usando soltanto addizione, sottrazione e moltiplicazione, gli esponenti delle variabili sono valori interi non negativi. In altre parole, un polinomio tipico, cioè ridotto in forma normale, è la somma algebrica di alcuni monomi non simili tra loro, vale a dire con parti letterali diverse. Ad esempio:

$$x + 3y - z^2$$

è la somma di tre monomi. Ciascun monomio viene chiamato *termine* del polinomio.

Le costanti sono anche chiamate "coefficienti" e sono tutte elementi di uno stesso insieme numerico o di un anello.

Quando valutati in un opportuno dominio, i polinomi possono essere interpretati come funzioni. Ad esempio, il polinomio

$$p(x) = x^2 - 3x + 2$$

definisce una funzione reale di variabile reale.

Quando questo ha senso, le radici del polinomio sono definite come l'insieme di quei valori che, sostituiti alle variabili, danno all'espressione polinomiale il valore nullo. Ad esempio, $p(x)$ ha come radici i valori 1 e 2, poiché sostituendoli nell'espressione del polinomio si ha

$$1^2 - 3 \times 1 + 2 = 0$$
$$2^2 - 3 \times 2 + 2 = 0$$

I polinomi sono oggetti matematici di fondamentale importanza, alla base soprattutto dell'algebra, ma anche dell'analisi e della geometria analitica.

Indice

Nomenclatura

Operazioni con i polinomi

- Somma di due polinomi
- Prodotto di un polinomio per uno scalare
- Moltiplicazione di due polinomi
- Composizione di due polinomi
- Grado del polinomio zero

Riduzione delle variabili

Polinomi di una sola variabile

Radici di un polinomio
Funzioni polinomiali
Esempi
Derivata
Anello di polinomi
Esempi
Derivata formale
Somme di potenze di radici
Casi particolari
Caso particolare "`UNIQ--postMath-000000AF-QINU`"
Caso particolare "`UNIQ--postMath-000000B5-QINU`"
Note
Bibliografia
Voci correlate
Altri progetti
Collegamenti esterni

Nomenclatura

Un polinomio si dice:

- *ridotto in forma normale*, quando è stato semplificato, sono stati accorpati i suoi termini simili e sono stati eliminati gli eventuali monomi nulli. Ad esempio:

  $$x + 3y + 28z - 2y - 28z$$

  ridotto in forma normale diventa

  $$x + y,$$

- *nullo*, se consta del solo zero.
- monomio, binomio, trinomio, *quadrinomio*... se è la somma rispettivamente di uno, due, tre, quattro... monomi.
- *omogeneo* se è la somma di monomi dello stesso grado. Ad esempio:
  $x^2 + 3y^2 - xz$
  è omogeneo di grado 2.
- *completo* rispetto ad una variabile, se osservando tutti i termini del polinomio di quella certa variabile e partendo dal termine di grado più elevato rispetto a quella variabile il polinomio contiene tutti i termini di grado inferiore fino a zero. Esempio di un polinomio *completo rispetto a* z: $xz^3 + 3yz^2 + z - 2.$

Due polinomi sono considerati *uguali* se, dopo essere stati ridotti in forma normale, hanno gli stessi termini, a meno dell'ordine. Quindi i polinomi seguenti sono uguali:

$$x + 3y + 28z - 2y - 28z,\ x + y,\ y + x.$$

Il *grado* di un polinomio non nullo e ridotto in forma normale è il massimo grado dei suoi monomi, mentre il *grado parziale* rispetto ad una variabile è il grado risultante vedendo tutte le altre variabili come coefficienti. Quindi

$$2 + xy + y$$

ha grado due, mentre ha gradi parziali uno rispetto sia a x che a y.

Si dicono *coefficienti* di un polinomio i coefficienti dei suoi singoli termini. Quindi i coefficienti di $2 + xy + y$ sono rispettivamente 2, 1 e 1: il coefficiente 1 in un monomio è solitamente sottinteso.

Il *termine noto* di un polinomio ridotto in forma normale è l'unico monomio (se esiste) di grado zero, cioè non contenente variabili. Se non esiste un tale monomio, il termine noto è considerato generalmente inesistente o uguale a zero, secondo il contesto. Ad esempio, in

$$x^2 + y^3 + x + 5$$

il termine noto è l'ultimo monomio: 5.

Operazioni con i polinomi

Due polinomi possono essere sommati, sottratti, e moltiplicati usando le usuali proprietà commutativa, associativa e distributiva delle operazioni di somma e prodotto. Ad esempio, se

$$p(x) = x^2 - x,$$
$$q(x) = x + 2,$$

allora la somma ed il prodotto di p e q sono rispettivamente

$$p(x) + q(x) = (x^2 - x) + (x + 2) = x^2 + 2;$$
$$p(x)q(x) = (x^2 - x)(x + 2) = x^3 + 2x^2 - x^2 - 2x = x^3 + x^2 - 2x.$$

Somme e prodotti di polinomi danno come risultato un nuovo polinomio.

Somma di due polinomi

Il grado (*degree*) della somma (o differenza) di due polinomi è minore o uguale al polinomio di grado maggiore. È sempre uguale al massimo tra i due, quando i due polinomi hanno grado differente:

$$\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q));$$
$$\deg(P - Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q)).$$

Esempi:

- Il grado di $(x^3 + x) + (x^2 + 1) = x^3 + x^2 + x + 1$ è 3. Si noti che 3 ≤ max(3, 2)
- Il grado di $(x^3 + x) - (x^3 + x^2) = -x^2 + x$ è 2. Si noti che 2 ≤ max(3, 3)

Prodotto di un polinomio per uno scalare

Il grado del prodotto di un polinomio per un numero scalare (diverso da zero) è uguale al grado del polinomio:

$$\deg(cP) = \deg(P).$$

Esempio:

- Il grado di $2(x^2 + 3x - 2) = 2x^2 + 6x - 4$ è 2, che è appunto uguale al grado di $x^2 + 3x - 2$.

Si noti che questo non è sempre vero per i polinomi definiti su un anello che contiene un divisore di zero. Ad esempio, in $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$, $\deg(1 + 2x) = 1$, ma $\deg(2(1 + 2x)) = \deg(2 + 4x) = \deg(2) = 0$. L'insieme dei polinomi aventi coefficienti da un dato campo F e grado minore o uguale a n, forma uno spazio vettoriale (questo insieme non è un anello, e non è chiuso, come mostrato in precedenza).

Moltiplicazione di due polinomi

Il grado del prodotto di due polinomi definiti su un campo -(oggetto in cui sono definite le operazioni di somma e prodotto, con certe proprietà)- oppure su un dominio d'integrità, è uguale alla somma dei gradi dei due polinomi:

$$\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q).$$

Esempio:

- Il grado di $(x^3 + x)(x^2 + 1) = x^5 + 2x^3 + x$ è $3 + 2 = 5$.

Si noti che ciò non è sempre vero per i polinomi definiti su un anello arbitrario. Ad esempio, in $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$, $\deg(2x) + \deg(1 + 2x) = 1 + 1 = 2$, ma $\deg(2x(1 + 2x)) = \deg(2x) = 1$.

Composizione di due polinomi

Il grado della composizione di due polinomi P e Q a coefficienti non costanti è uguale al prodotto dei rispettivi gradi:

$$\deg(P \circ Q) = \deg(P)\deg(Q).$$

Esempio:

- Se $P = (x^3 + x)$, $Q = (x^2 + 1)$, allora $P \circ Q = P \circ (x^2 + 1) = (x^2 + 1)^3 + (x^2 + 1) = x^6 + 3x^4 + 4x^2 + 2$, che ha grado d 6.

Si noti che ciò non è sempre vero per i polinomi definiti su un anello arbitrario. Ad esempio, in $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$, $\deg(2x)\deg(1 + 2x) = 1 \cdot 1 = 1$, ma $\deg(2x \circ (1 + 2x)) = \deg(2 + 4x) = \deg(2) = 0$.

Grado del polinomio zero

Possiamo affermare correttamente sia che il grado del polinomio zero è indefinito, sia che il grado del polinomio zero può essere definito con un numero negativo (per convenzione −1 o $-\infty$).[1]

Come qualsiasi valore costante, il valore zero può essere considerato come un polinomio (costante), detto polinomio nullo. Questo polinomio non ha termini che non siano nulli, e perciò, propriamente non ha un grado, vale a dire che il suo grado è indefinito.

Le proposizioni precedenti sul grado della somma, prodotto e composizione di polinomi non si applicano se anche uno dei due è un polinomio nullo.[2]

Le formule valgono se si introducono alcune opportune estensioni. È pertanto utile definire il grado di un polinomio-zero, pari a "meno infinito", $-\infty$, e introdurre quindi queste regole aritmetiche[3]

$$\max(a, -\infty) = a,$$

e

$$a + -\infty = -\infty.$$

I seguenti esempi illustrano come questa estensione soddisfi quelle di somma, prodotto e composizione di due polinomi:

- Il grado della somma $(x^3 + x) + (0) = x^3 + x$ è 3. Ciò soddisfa il risultato atteso, cioè che $3 \leq \max(3, -\infty)$.
- Il grado della differenza $(x) - (x) = 0$ è $-\infty$. E, infatti, vale che: $-\infty \leq \max(1, 1)$.
- Il grado del prodotto $(0)(x^2 + 1) = 0$ è $-\infty$. E, infatti, vale che: $-\infty = -\infty + 2$.

Riduzione delle variabili

In un polinomio, è spesso utile considerare alcune variabili come costanti. Ad esempio, il polinomio

$$p = x^2 + y + 2$$

può essere considerato anche come polinomio in x soltanto, dando a y il ruolo di un valore costante. Alternativamente, può essere visto come polinomio in y soltanto. Le proprietà dei polinomi che ne risultano possono essere molto diverse tra loro: qui ad esempio p ha grado 2 rispetto a x, e solo 1 rispetto a y. Ad esempio, il polinomio

$$x^2y^3 + z^4$$

è di grado 5, ma se visto soltanto nelle singole variabili x o y o z ha grado rispettivamente 2, 3 e 4.

Polinomi di una sola variabile

Un polinomio generico con una sola variabile si può rappresentare con la seguente scrittura:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n,$$

con a_n diverso da zero. Con questa scrittura, a_0 è il termine noto e n è il grado. a_n si dice *coefficiente direttivo*.

Un tale polinomio è:

- *monico*, se $a_n = 1$;

- *completo*, se tutti gli a_i sono diversi da zero, per $0 \leq i \leq n$.

Radici di un polinomio

🔎 *Lo stesso argomento in dettaglio:* ***Radice (matematica)***.

Una *radice* di un polinomio $p(x)$ in una sola variabile è un numero b tale che

$$p(b) = 0,$$

cioè tale che, sostituito a x, rende nulla l'espressione. Quindi se

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,$$

il numero b è radice se

$$p(b) = a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + \ldots + a_n b^n = 0.$$

Nel caso di polinomi a coefficienti reali l'insieme delle radici reali di un polinomio p si può visualizzare sul piano cartesiano come l'intersezione del grafico della funzione polinomiale $y = p(x)$ con l'asse delle ascisse.

In un dominio, un polinomio di grado n può avere al più n radici distinte. Esistono polinomi senza radici reali, come ad esempio

$$x^2 + 1,$$

poiché $b^2 + 1 > 0$ per ogni b reale. D'altra parte, per il teorema fondamentale dell'algebra ogni polinomio complesso ha esattamente n radici complesse, contate con molteplicità. Inoltre, per il teorema delle radici complesse coniugate, se z_0 è una radice di un polinomio a coefficienti reali, allora anche il suo complesso coniugato $\overline{z_0}$ è una radice.

Nella scuola vengono insegnate formule per trovare le radici dei polinomi di primo e secondo grado. Esistono formule analoghe per esprimere la radici di un polinomio di terzo e quarto grado in termini dei coefficienti, utilizzando solamente le quattro operazioni ed estrazioni di radice (la cosiddetta *risoluzione per radicali*). È stato invece dimostrato nella teoria di Galois che non esiste una formula generale di questo tipo per polinomi dal quinto grado in su.

Funzioni polinomiali

Sia A un anello. A un polinomio

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$$

a coefficienti in A si può associare una *funzione polinomiale*, che è la funzione da A in sé definita da

$$b \mapsto f(b) = a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + \ldots + a_n b^n,$$

per $b \in A$. Se A è finito, allora polinomi diversi possono dare luogo alla stessa funzione. Per esempio se $A = \mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ è il campo con un numero primo p di elementi, allora al polinomio nullo e al polinomio $x^p - x$ è comunque associata, per il piccolo teorema di Fermat, la funzione che manda ogni elemento di A

in zero. Lo stesso può valere se A è infinito, ma non è un dominio, per esempio se A è un'algebra esterna infinita, in cui vale $x^2 = 0$ per ogni $x \in A$.

Se invece A è un dominio infinito, allora vale il seguente *principio d'identità dei polinomi*, che afferma che a polinomi diversi sono associate funzioni polinomiali diverse (cioè la funzione sopra descritta che associa a un polinomio una funzione polinomiale è iniettiva):

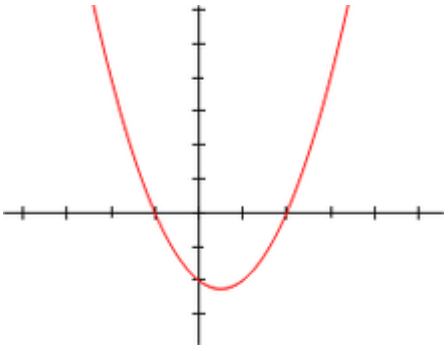
> *due polinomi p e q a coefficienti in un dominio A infinito tali che $p(x) = q(x)$ per ogni $x \in A$ sono uguali.*

Questo dipende dal fatto che in un dominio un polinomio non nullo ha solo un numero finito di radici.

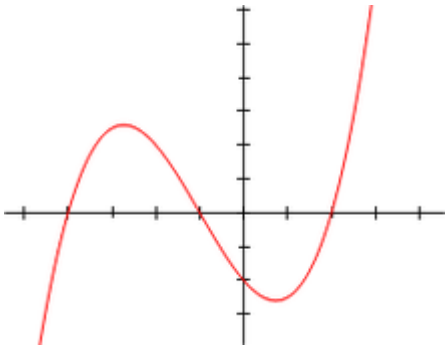
Negli esempi che seguono, fissiamo A eguale al campo dei numeri reali. A seconda del grado,

> un polinomio di grado 0 è una funzione costante,
> un polinomio di grado 1 è una funzione lineare,
> un polinomio di grado 2 è una funzione quadratica o conica,
> un polinomio di grado 3 è una funzione cubica.

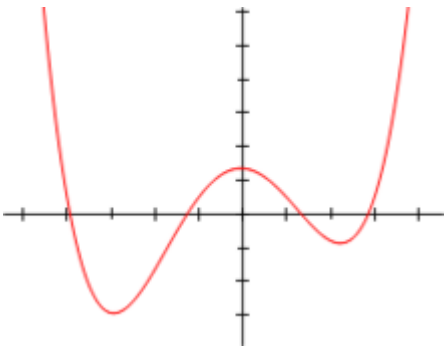
Esempi



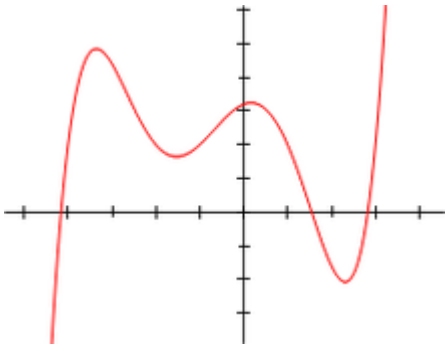
Polinomio di grado 2:
$f(x) = x^2 - x - 2$
$= (x+1)(x-2)$



Polinomio di grado 3:
$f(x) = x^3/5 + 4x^2/5 - 7x/5 - 2$
$= 1/5\ (x+5)(x+1)(x-2)$



Polinomio di grado 4:
$f(x) = 1/14\ (x+4)(x+1)(x-1)(x-3) + 0.5$



Polinomio di grado 5:
$f(x) = 1/20\ (x+4)(x+2)(x+1)(x-1)(x-3) + 2$

Derivata

Una funzione polinomiale a coefficienti reali

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$$

è derivabile e la sua derivata è ancora un polinomio,

$$p'(x) = a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1}.$$

Ragionando quindi induttivamente, si può quindi affermare che le funzioni polinomiali sono infinitamente derivabili (o *lisce*) e che la derivata (n+1)-esima di un polinomio di grado n è la funzione nulla. In realtà esse sono anche funzioni analitiche.

Anello di polinomi

🔎 *Lo stesso argomento in dettaglio:* ***Anello dei polinomi****.*

Dato un anello A, il simbolo

$$A[x_1, \ldots, x_n]$$

denota l'insieme di tutti i polinomi nelle variabili $x_1, \ldots, x_n$ con coefficienti in A. Ad esempio, A può essere un campo come quello dei numeri reali o complessi.

L'insieme $A[x_1, \ldots, x_n]$ risulta essere anch'esso un anello, l'anello dei polinomi in n variabili con coefficienti in A. Lo studio delle proprietà di questo anello è una parte importante dell'algebra e della geometria algebrica.

Se A è un campo, l'anello dei polinomi è un'algebra su A, e quando $n = 1$ è anche un anello euclideo, nel senso che i polinomi possono essere divisi con quoziente e resto come i numeri interi (se $n > 1$ questo non è vero poiché l'anello di polinomi non è un dominio ad ideali principali).

Esempi

- $\mathbb{Z}[x]$ non è un dominio ad ideali principali, e quindi neanche un anello euclideo. Infatti l'ideale $(2, x)$ generato dai polinomi 2 e x non è principale.
- $\mathbb{R}[x, y]$ non è un dominio ad ideali principali, e quindi neanche un anello euclideo. Infatti l'ideale (x, y) generato dai polinomi x e y non è principale.
- $K[x]$, se K è un campo, è un dominio euclideo.
- Il principio di identità dei polinomi vale solo su domini infiniti. Ad esempio, se K è il campo finito con due elementi, cioè $K \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, allora il polinomio $f(x) = x + x^2$ è tale che $f(x) = 0$ per ogni $x \in K$ in (cioè 0 e 1), benché non sia il polinomio nullo.

Derivata formale

🔎 *Lo stesso argomento in dettaglio:* ***Algebra differenziale****.*

Il calcolo della derivata di un polinomio si estende come *definizione* di derivata (chiamata *derivata formale*) nel caso in cui il polinomio abbia coefficienti in un anello A, anche in assenza del calcolo infinitesimale. Molte delle proprietà della derivata si estendono anche alla derivata formale.

Somme di potenze di radici

Siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ le n radici di un polinomio di grado n, e sia $s_k = \lambda_1^k + \ldots + \lambda_n^k$. Allora

- se $1 \leq k \leq n$ si ha che $s_k + a_{k-1} s_{k-1} + \ldots + a_{n-k+1} s_1 + a_{n-k} \cdot n = 0$;
- se $k > n$ si ha che $s_k + a_{n-1} s_{k-1} + \ldots + a_1 s_{k-n+1} + a_0 s_{k-n} = 0$.

Casi particolari

Caso particolare $n = 2$

Per le relazioni tra radici e coefficienti, un polinomio di secondo grado si può scrivere nella forma

$$x^2 - Sx + P,$$

dove

- $S = \lambda_1 + \lambda_2$,
- $P = \lambda_1 \lambda_2$.

Allora

- $s_1 = \lambda_1 + \lambda_2 = S$,
- $s_2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = S^2 - 2P$.

Caso particolare $n = 3$

Per le relazioni tra radici e coefficienti un polinomio di terzo grado si può scrivere nella forma

$$x^3 - Sx^2 + Qx - P,$$

dove

- $S = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$,
- $Q = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1$,
- $P = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$.

Allora

- $s_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = S$,
- $s_2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = S^2 - 2Q$,

- $s_3 = \lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3 = S^3 - 3SQ + 3P.$

Note

1. ^ Shafarevich (2003) afferma riguardo al polinomio zero: "In questo caso, noi consideriamo che il grado del polinomio non è definito." (p. 27)
   Childs (1995) usa −1. (p. 233)
   Childs (2009) usa −∞ (p. 287), tuttavia esclude il polinomio zero nella sua Proposition 1 (p. 288) e in seguito spiega che questa proposizione 1 porta ad introdurre il polinomio zero "con la ragionevole assunzione che $-\infty + m = -\infty$ per qualsiasi m intero ovvero $m = -\infty$".
   Axler (1997) usa −∞. (p. 64)
   Grillet (2007) afferma: "Il grado del polinomio zero a volte non è definibile, altre volte è definito in vario modo come $-1 \in \mathbb{Z}$ oppure come $-\infty$, in quanto deg 0 < deg A per ogni A ≠ 0." (dove A è un polinomio.). Tuttavia, l'autore esclude il polinomio zero Proposition 5.3. (p. 121)
2. ^ (EN) Eric W. Weisstein, *Polinomio*, in *MathWorld*, Wolfram Research.
3. ^ Axler (1997) dà queste regole e afferma: "The 0 polynomial is declared to have degree $-\infty$ so that exceptions are not needed for various reasonable results." (p. 64)

Bibliografia

- (EN) Peter Borwein e Tamás Erdélyi, *Polynomials and polynomial Inequalities*, Berlino, Springer, 1995, ISBN 0-387-94509-1.
- (EN) E.J. Barbeau, *Polynomials*, Springer, 2003, ISBN 978-0-387-40627-5.

Voci correlate

- Algoritmo di Bairstow
- Criterio di Cartesio
- Criterio di Jury
- Criterio di Routh-Hurwitz
- Espressione matematica
- Matrice compagna
- Prodotto notevole
- Sequenza polinomiale
- Scomposizione dei polinomi
- Teorema di Ruffini

Altri progetti

- Wikimedia Commons (https://commons.wikimedia.org/wiki/?uselang=it) contiene immagini o altri file su **polinomio (https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Polynomials?uselang=it)**

Collegamenti esterni

-

- (EN) *Polinomio*, su *Enciclopedia Britannica*, Encyclopædia Britannica, Inc.
- (EN) Eric W. Weisstein, *Polinomio*, su *MathWorld*, Wolfram Research.

Controllo di autorità	Thesaurus BNCF 21918 (https://thes.bncf.firenze.sbn.it/termine.php?id=21918) · LCCN (EN) sh85104702 (http://id.loc.gov/authorities/subjects/sh85104702) · BNF (FR) cb119786822 (https://catalogue.bnf.fr/ark:/12148/cb119786822) (data) (https://data.bnf.fr/ark:/12148/cb119786822) · J9U (EN, HE) 987007563144505171 (http://uli.nli.org.il/F/?func=find-b&local_base=NLX10&find_code=UID&request=987007563144505171) · NDL (EN, JA) 00572625 (https://id.ndl.go.jp/auth/ndlna/00572625)

Estratto da "https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Polinomio&oldid=131092476"

Questa pagina è stata modificata per l'ultima volta il 20 dic 2022 alle 17:24.

Il testo è disponibile secondo la licenza Creative Commons Attribuzione-Condividi allo stesso modo; possono applicarsi condizioni ulteriori. Vedi le condizioni d'uso per i dettagli.

Prodotto notevole

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

In matematica, un **prodotto notevole**[1] è un'identità che compare spesso nel calcolo letterale, in particolare per effettuare il prodotto di polinomi di forme particolari. I prodotti notevoli consentono di svolgere più rapidamente i calcoli rispetto all'applicazione diretta delle regole del calcolo letterale (come la moltiplicazione di due polinomi). Inoltre, riconoscere un prodotto notevole è utile per la scomposizione in fattori dei polinomi o di altre espressioni algebriche.[1]

Indice

Quadrato della somma algebrica di due termini e della somma algebrica di tre termini
Cubo di un binomio
Cubo di un trinomio
Prodotto della somma di due termini per la loro differenza
- Altri casi
- Casi meno evidenti

Somma e differenza tra cubi
Somma e differenza tra potenze dello stesso grado
Potenza *n*-esima di un binomio o della somma algebrica di due termini
Note
Bibliografia
Collegamenti esterni

Quadrato della somma algebrica di due termini e della somma algebrica di tre termini

Il quadrato di un binomio generico o più generalmente dalla somma algebrica di due termini $(A+B)$ può essere espresso come[2][3]:

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + B^2 + AB = A^2 + 2AB + B^2.$$

Se il binomio presenta una sottrazione allora il suo quadrato risulterà:

$$(A-B)^2 = (A-B)(A-B) = A^2 - AB - AB + B^2 = A^2 - 2AB + B^2.$$

Le due formule si possono unificare nel seguente modo:

$$(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2.$$

In generale si può dire quindi che: *Lo sviluppo del quadrato della somma algebrica di due termini è uguale alla somma tra il quadrato del primo termine, il doppio del prodotto tra i due termini ed il quadrato del secondo termine.*

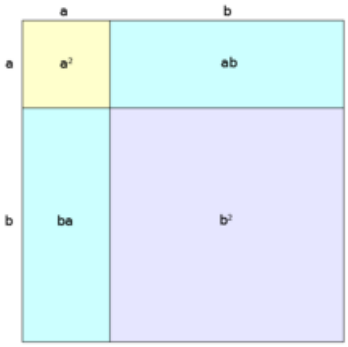
La figura rappresenta un quadrato il cui lato è la somma dei due valori a e b. La sua area vale dunque $(a+b)^2$. Ma questa si ottiene anche attraverso l'addizione dell'area del quadrato giallo (a^2), delle aree dei due rettangoli azzurri (ab per ciascuno) e dell'area del quadrato viola (b^2).

Il quadrato della somma algebrica di tre termini può essere espresso come[4]:

$$\begin{aligned}(A+B+C)^2 &= (A+B+C)(A+B+C) = \\ &= A^2 + AB + AB + AC + B^2 + AC + BC + BC + C^2 = \\ &= A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC.\end{aligned}$$

Le formule di sopra si possono facilmente generalizzare al caso di polinomi composti da più di due monomi. In generale si può dire che:

> *Il quadrato di un polinomio è uguale alla somma dei quadrati di tutti i termini più il doppio prodotto di ogni termine per ciascuno di quelli che lo seguono.*



Dimostrazione grafica della formula per calcolare il quadrato di un binomio

Cubo di un binomio

Il cubo di un binomio può essere espresso come[2][5]:

$$(x+y)^3 = (x+y)^2(x+y) = x^3 + x^2y + 2xy^2 + 2x^2y + xy^2 + y^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

e se il binomio presenta una sottrazione:

$$(x-y)^3 = (x-y)^2(x-y) = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3.$$

Le due formule si possono unificare nel seguente modo:

$$(x \pm y)^3 = x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3.$$

Quindi in generale si può dire:

> *Il cubo di binomio è un polinomio formato dalla somma del cubo del primo termine del binomio, con il cubo del secondo termine, con il triplo del prodotto del quadrato del primo termine per il secondo, con il triplo del prodotto del quadrato del secondo termine per il primo, ciascuno preso con il proprio segno.*

La scrittura di queste formule rispetto ai termini cubici in a e in b, è nota come formula di Waring ed è necessaria nella soluzione di sistemi simmetrici, nei quali tutti i termini in x e y sono sostituiti dalle variabili somma s e prodotto p.

Cubo di un trinomio

Il cubo di un trinomio può essere calcolato come:

$$\begin{aligned}(x+y+z)^3 &= (x+y+z)^2(x+y+z)\\ &= (x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz)(x+y+z)\\ &= x^3+y^3+z^3+3x^2y+3x^2z+3y^2x+3y^2z+3z^2x+3z^2y+6xyz.\end{aligned}$$

In generale si può dire quindi che:

> *Il cubo di un trinomio è uguale alla somma dei cubi dei tre termini, più il triplo prodotto del quadrato di ogni termine per ciascun altro termine, più sei volte il prodotto dei tre termini.*

Raccogliendo i termini al quadrato, la formula diventa:

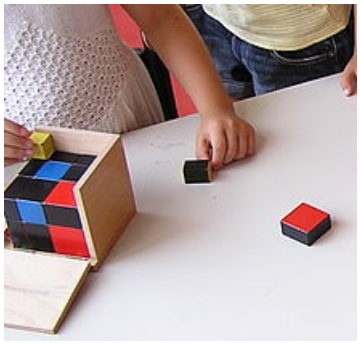
$$(x+y+z)^3 = x^3+y^3+z^3+3x^2(y+z)+3y^2(x+z)+3z^2(x+y)+6xyz.$$

Si può quindi affermare che:

> *Il cubo di un trinomio è uguale alla somma dei cubi dei tre termini, più il triplo prodotto del quadrato di ogni termine per la somma degli altri due, più sei volte il prodotto dei tre termini.*

C'è anche una forma meno nota per esprimere il cubo di un trinomio:

$$(x+y+z)^3 = x^3+y^3+z^3+3(x+y)(x+z)(y+z).$$


Con il materiale didattico Montessori gli studenti possono esercitarsi sul cubo del trinomio, mediante una rappresentazione tridimensionale cubica scomponibile in diversi solidi geometrici, uno per ogni termine del prodotto notevole

Per verificarla basta sviluppare i prodotti tra parentesi.

Prodotto della somma di due termini per la loro differenza

$$(x+y)(x-y) = x^2 - xy + xy - y^2 = x^2 - y^2$$

Il prodotto della somma di due termini per la loro differenza è uguale al quadrato del primo termine meno il quadrato del secondo. Leggendo l'uguaglianza da destra verso sinistra, si ottiene anche la regola di scomposizione in fattori di un polinomio pari alla differenza di due quadrati[4].

La prima formula letta al contrario, vista cioè come scomposizione in fattori della differenza di due quadrati, si generalizza per n qualsiasi in:

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1}) = (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^{(n-1)-k}y^k.$$

Se n è dispari, vale anche:

$$x^n + y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \ldots - xy^{n-2} + y^{n-1}) = (x+y)\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^{(n-1)-k}y^k.$$

Altri casi

È frequente anche trovare questo prodotto notevole con delle potenze, ma il procedimento di risoluzione si può svolgere allo stesso modo:

$$(x+y)^3(x-y)^3 = (x^2 - y^2)^3.$$

La potenza rimane invariata e viene racchiusa tra parentesi nel prodotto notevole svolto. A questo punto si applica il cubo del binomio e si risolve l'espressione in questo modo:

$$(x^2 - y^2)^3 = x^6 - 3x^4y^2 + 3x^2y^4 - y^6.$$

Casi meno evidenti

Il prodotto notevole può essere applicato anche in casi meno evidenti, per esempio:

$$(x+y+z)(x-y-z) = (x+y+z)(x-(y+z)) = x^2 - (y+z)^2.$$

Oppure ancora:

$$(x+y+z)(x+y-z) = (x+y)^2 - z^2 = x^2 + 2xy + y^2 - z^2,$$

che nel caso $x = a^2$, $y = 2b^2$ e $z = 2ab$, diventa:

$$(a^2 + 2ab + 2b^2)(a^2 - 2ab + 2b^2) = a^4 + 4b^4..$$

Sostituendo b nell'ultima identità con $b/\sqrt{2}$ si ottiene anche:

$$(a^2 + \sqrt{2}ab + b^2)(a^2 - \sqrt{2}ab + b^2) = a^4 + b^4$$

che comunque non è una fattorizzazione con polinomi a coefficienti interi.

Questi casi possono essere chiamati "riconducibili ad una differenza tra quadrati".

Somma e differenza tra cubi

Un binomio formato dalla somma di due termini di terzo grado può essere scritto come[6]:

$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2).$$

Un binomio formato dalla differenza di due termini di terzo grado può essere scritto come:

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2).$$

Le due formule si possono unificare scrivendole come:

$$x^3 \pm y^3 = (x \pm y)(x^2 \mp xy + y^2).$$

Il trinomio di secondo grado viene talvolta detto *falso quadrato* perché, rispetto al quadrato di un binomio, il secondo termine manca del coefficiente 2 e ha il segno opposto. Inoltre nell'insieme dei numeri reali tale trinomio non è mai fattorizzabile nel prodotto di due binomi.

Somma e differenza tra potenze dello stesso grado

La precedente formula, che riguarda un binomio di terzo grado, può essere generalizzata con le seguenti riduzioni nel campo dei numeri algebrici, dimostrabili passando attraverso le radici complesse coniugate di $f(x) = x^n \pm y^n$.[7]

Un binomio formato dalla somma di due potenze di egual grado pari può essere scritto come:

$$x^{2n} + y^{2n} = \prod_{k=1}^{n} \left(x^2 \pm 2xy \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n} + y^2 \right).$$

Un binomio formato dalla differenza di due potenze di egual grado pari può essere scritto come:

$$x^{2n} - y^{2n} = (x - y)(x + y) \prod_{k=1}^{n-1} \left(x^2 \pm 2xy \cos \frac{k\pi}{n} + y^2 \right).$$

Un binomio formato dalla somma o dalla differenza di due potenze di egual grado dispari può essere scritto come:

$$x^{2n+1} \pm y^{2n+1} = (x \pm y) \prod_{k=1}^{n} \left(x^2 \pm 2xy \cos \frac{2k\pi}{2n+1} + y^2 \right) = (x \pm y) \prod_{k=1}^{n} \left(x^2 \pm 2xy(-1)^k \cos \frac{k\pi}{2n+1} + y^2 \right)$$

.

Per esempio, nel caso del quinto grado, si ottiene:

$$x^5 \pm y^5 = (x \pm y) \left(x^2 \mp \frac{1-\sqrt{5}}{2} xy + y^2 \right) \left(x^2 \mp \frac{1+\sqrt{5}}{2} xy + y^2 \right),$$

mentre nel caso della somma del quarto grado, si ottiene:

$$x^4 + y^4 = (x^2 - \sqrt{2}xy + y^2)(x^2 + \sqrt{2}xy + y^2).$$

Potenza *n*-esima di un binomio o della somma algebrica di due termini

🔎 *Lo stesso argomento in dettaglio:* ***Teorema binomiale****.*

Un binomio elevato alla n-esima potenza può essere scritto come:

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{(n-k)} B^k,$$

dove $\binom{n}{k}$ è il coefficiente binomiale.

La potenza n-esima del binomio o della somma algebrica di due termini è composta da $n + 1$ termini, due dei quali di potenza n e coefficiente unitario. Gli esponenti di A decrescono da n a 0, mentre quelli di B crescono da 0 a n. I coefficienti binomiali si possono determinare, oltre che con i fattoriali, anche con il triangolo di Tartaglia.

Note

1. *youmath.it*, https://www.youmath.it/lezioni/algebra-elementare/polinomi/270-prodotti-notevoli.html.

2. Marzia Re Fraschini, Gabriella Grazzi, *I principi della matematica (Volume 3)*, Atlas, 2012, ISBN 978-88-268-1711-8. p.15
3. ^ *youmath.it*, https://www.youmath.it/lezioni/algebra-elementare/polinomi/950-quadrato-del-binomio.html.
4. Marzia Re Fraschini, Gabriella Grazzi, *I principi della matematica (Volume 3)*, Atlas, 2012, ISBN 978-88-268-1711-8. p.16
5. ^ *youmath.it*, https://www.youmath.it/lezioni/algebra-elementare/polinomi/951-cubo-di-binomio.html.
6. ^ Marzia Re Fraschini, Gabriella Grazzi, *I principi della matematica (Volume 3)*, Atlas, 2012, ISBN 978-88-268-1711-8. p.29
7. ^ *La Scomposizione Ciclotomica di* $a^n \pm b^n$ *(https://docs.google.com/file/d/0B3keY4mwHh9kcmMxcFNVUjZfemgxWTZVeDJMMkpkWXdPLVZZ/edit?usp=docslist_api)*, *The Cyclotomic Factorization of* $a^n \pm b^n$ *(https://docs.google.com/file/d/0B3keY4mwHh9kOUI6QjBOVjlac2dWaEZwM1JXeDcxV0w1M0hJ/edit?usp=docslist_api)*, pagg. 20-25

Bibliografia

- Marzia Re Fraschini, Gabriella Grazzi, *I principi della matematica (Volume 3)*, Atlas, 2012, ISBN 978-88-268-1711-8.

Collegamenti esterni

- *Spiegazione del significato geometrico dei prodotti notevoli*, su *rubiconrivergame.com*.

Estratto da "https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Prodotto_notevole&oldid=131463149"

Questa pagina è stata modificata per l'ultima volta il 12 gen 2023 alle 06:01.

Il testo è disponibile secondo la licenza Creative Commons Attribuzione-Condividi allo stesso modo; possono applicarsi condizioni ulteriori. Vedi le condizioni d'uso per i dettagli.

WIKIPEDIA

Retta

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

La **retta** o **linea retta** è uno dei tre enti geometrici fondamentali della geometria euclidea. Viene definita da Euclide nei suoi *Elementi* come un concetto primitivo. Un filo di cotone o di spago ben teso tra due punti è un modello materiale che ci può aiutare a capire cosa sia la retta, un ente geometrico immateriale senza spessore e con una sola dimensione.

Tipica rappresentazione di una retta come un segmento con estremi tratteggiati.

La retta è illimitata in entrambe le direzioni, e inoltre contiene infiniti punti, cioè è infinita. Viene generalmente contrassegnata con una lettera minuscola dell'alfabeto latino (solitamente con la *r*).

Indice

Definizione geometrica

Retta nel piano cartesiano

Retta nello spazio euclideo tridimensionale

Retta in uno spazio euclideo n-dimensionale

Distanza tra rette

- Distanza tra rette parallele
- Distanza tra rette sghembe

Note

Voci correlate

Altri progetti

Collegamenti esterni

Definizione geometrica

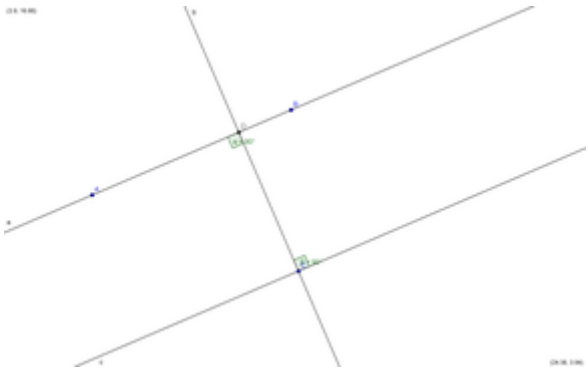
La retta è il secondo ente fondamentale della geometria; geometricamente priva di alcuno spessore ha una sola dimensione: la lunghezza.

Una retta può *giacere* (cioè essere contenuta) nel piano o nello spazio tridimensionale.

Due rette nel piano possono essere:

- *Incidenti* se hanno un unico punto in comune.
  - Un caso particolare di rette incidenti si ha quando le due rette formano nel punto di intersezione quattro angoli retti, in tal caso sono dette *perpendicolari*

- *Parallele* se non si intersecano o se hanno tutti i punti in comune; in questo caso sono coincidenti. Due rette parallele nel piano mantengono sempre la stessa distanza tra di loro (questa caratteristica, tipica della geometria euclidea, non è verificata per esempio nella geometria iperbolica, dove due rette parallele possono divergere).



Esempio di rette complanari, di cui 2 parallele ed una incidente e perpendicolare a entrambe le altre due.

Due rette nello spazio possono essere:

- *Complanari* se esiste un piano che le contiene entrambe. In questo caso, sono *incidenti* se si intersecano e *parallele* altrimenti.
- *Sghembe* se non sono contenute in un piano comune, e di conseguenza non hanno punti in comune né sono parallele.

Date due rette sghembe, per ognuna di esse passa un unico piano parallelo all'altra retta. La distanza tra questi due piani equivale alla distanza tra le due rette.

Retta nel piano cartesiano

🔎 *Lo stesso argomento in dettaglio:* ***Retta nel piano cartesiano***.

Una retta nel piano cartesiano è descritta da un'equazione lineare

$$ax + by + c = 0$$

dove i coefficienti a, b e c sono dei numeri reali fissati, con a e b non contemporaneamente nulli.

Se $b \neq 0$ oppure $a \neq 0$, è possibile descrivere la stessa retta in *forma esplicita* rispettivamente in una delle due forme seguenti:

$$y = mx + q \text{ oppure } x = m'y + q'$$

dove m si chiama *coefficiente angolare* e quantifica la pendenza della retta. Nella prima delle equazioni di cui sopra il termine noto q rappresenta l'ordinata del punto di intersezione della retta con l'asse delle y (*ordinata all'origine* o *intercetta*), nella seconda il termine noto q' rappresenta l'ascissa del punto di intersezione della retta con l'asse delle x.

Retta nello spazio euclideo tridimensionale

Nello spazio euclideo tridimensionale, una retta può essere descritta tramite *equazioni cartesiane* come luogo di intersezione di due piani non paralleli:

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

In questo caso le soluzioni del sistema dipendono da un solo parametro t ed è sempre possibile ricavare un insieme di *equazioni parametriche* per la retta:

$$\begin{cases} x = x_o + lt \\ y = y_o + mt \\ z = z_o + nt \end{cases}$$

dove il vettore $\mathbf{v} = l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}$ è un vettore parallelo alla retta e il punto $P(x_0, y_0, z_0)$ è un punto appartenente alla retta. Se l, m, n sono tutti diversi da zero è possibile ricavare le cosiddette *equazioni simmetriche* della retta:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

Sia le equazioni cartesiane che le equazioni parametriche della retta non sono univocamente determinate, e sono in effetti infinite.

Retta in uno spazio euclideo n-dimensionale

Nello spazio euclideo n-dimensionale $\mathbb{R}^n$, una *retta* è un insieme dei punti del tipo

$$r = \{\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$$

dove $\mathbf{x}_0$ e $\mathbf{v}$ sono due vettori fissati in $\mathbb{R}^n$ con $\mathbf{v}$ diverso da zero. Il vettore $\mathbf{v}$ descrive la direzione della retta, mentre $\mathbf{x}_0$ è un qualsiasi punto della retta. Scelte differenti dei vettori $\mathbf{x}_0$ e $\mathbf{v}$ possono descrivere la stessa retta.

Questa definizione di retta nello spazio di dimensione n è una estensione della rappresentazione in *forma esplicita* nel piano descritta sopra. Descrivere invece una retta in *forma implicita* come insieme di vettori che soddisfano delle equazioni lineari è più complicato, perché per il teorema di Rouché-Capelli sono necessarie $n - 1$ equazioni.

Distanza tra rette

Si definisce come distanza tra due rette r e r' la distanza minima tra due punti $P \in r$ e $P' \in r'$.

Tale distanza è ovviamente nulla nel caso di due rette che si intersecano. Per esaminare i restanti due casi (rette parallele e sghembe) verrà utilizzata la rappresentazione parametrica, che permette una trattazione unitaria per tutte le dimensioni. Siano dunque date due rette $\mathbf{r}$ e $\mathbf{r}'$ di equazioni parametriche rispettivamente:

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{b}t \qquad e \qquad \mathbf{r}' = \mathbf{c} + \mathbf{d}t'$$

dove $\mathbf{b}$ e $\mathbf{d}$ sono i loro vettori direzionali e $\mathbf{a}$ e $\mathbf{c}$ i vettori associati al punto T della retta $\mathbf{r}$ e al punto T' della retta $\mathbf{r}'$, relativamente alla terna cartesiana XYZ.

Distanza tra rette parallele

Dato che le rette sono parallele possiamo misurare la distanza a partire da un punto qualsiasi della prima retta. Scegliamo il punto di $\mathbf{r}$ segnato dal vettore $\mathbf{a}$. Ogni punto della retta $\mathbf{r}'$ può essere espresso nella forma $\mathbf{c} + t'\mathbf{d}$. Se chiamo $\mathbf{q}$ il vettore ortogonale a $\mathbf{b}$ che segna la distanza dall'altra retta, allora per le proprietà del prodotto scalare

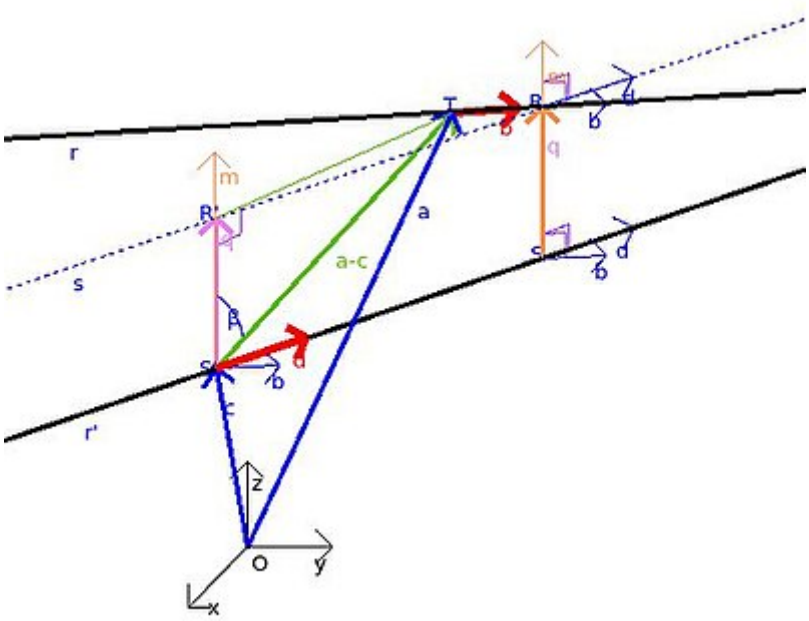
$$0 = \mathbf{q} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{c} + t'\mathbf{d} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$$

Ottenuto $\mathbf{q}$ risolvendo la precedente equazione (incognita in t') è sufficiente calcolare la norma di $\mathbf{q}$ quindi con riferimento all'equazione parametrica la distanza $d(r,s)$ fra due rette parallele r e s si può scrivere come:

$$d(r,s) = \left| \mathbf{rs} \times \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \right|$$

dove il vettore $\mathbf{v}$ è un vettore parallelo alle rette e il vettore $\mathbf{rs}$ è il vettore che congiunge un punto $R(x_r, y_r, z_r)$ della retta r e un punto $S(x_s, y_s, z_s)$ della retta s ovvero la distanza fra due rette parallele è data dalla proiezione del vettore $\mathbf{rs}$ nel verso ortogonale alle stesse.

Dimostrazione: dalle formule del prodotto vettoriale, i moduli dei versori sono unitari, resta: $|\mathbf{rs}| \sin\theta$



Rette sghembe.

Distanza tra rette sghembe

Se definiamo $\mathbf{q}$ come il vettore ortogonale a $\mathbf{b}$ e $\mathbf{d}$, la cui norma è la distanza tra le due rette, il nostro problema si riduce a trovare la norma di $\mathbf{q}$. I tre vettori $\mathbf{q}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{d}$ sono una base, e possiamo quindi facilmente scomporre il vettore $\mathbf{a} - \mathbf{c}$ lungo le tre componenti. Quindi

$$(\mathbf{a} - \mathbf{c}) = \frac{(\mathbf{a} - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b}}{\|b\|} \frac{\mathbf{b}}{\|b\|} + \frac{(\mathbf{a} - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{d}}{\|d\|} \frac{\mathbf{d}}{\|d\|} + \frac{(\mathbf{a} - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{q}}{\|q\|} \frac{\mathbf{q}}{\|q\|}$$

Molto semplicemente si ricava che

$$(\mathbf{a} - \mathbf{c}) - \frac{(\mathbf{a} - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b}}{\|b\|} \frac{\mathbf{b}}{\|b\|} - \frac{(\mathbf{a} - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{d}}{\|d\|} \frac{\mathbf{d}}{\|d\|} = \frac{(\mathbf{a} - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{q}}{\|q\|} \frac{\mathbf{q}}{\|q\|} = \mathbf{q}$$

con riferimento all'equazione parametrica la distanza $d(r,s)$ fra due rette sghembe r e s si può scrivere come:

$$d(r,s) = \left| \mathbf{rs} \cdot \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} \right|$$

dove il vettore $\mathbf{rs}$ è il vettore che congiunge un punto $R(x_r, y_r, z_r)$ della retta r che ha vettore parallelo $\mathbf{vr}$ e un punto $S(x_s, y_s, z_s)$ della retta s che ha vettore parallelo $\mathbf{vs}$, il vettore $\mathbf{n}$ è il vettore ortogonale $\mathbf{n} = \mathbf{vr} \times \mathbf{vs}$ ovvero la distanza fra due rette sghembe è data dalla proiezione del vettore $\mathbf{rs}$ nel verso del vettore $\mathbf{n}$.

Dimostrazione: dalle formule del prodotto scalare il modulo del versore è unitario, resta : $|\mathbf{rs}| \cos\theta$

Note

Voci correlate

- Semiretta
- Piano (geometria)
- Perpendicolarità
- Parallelismo (geometria)
- Retta proiettiva
- Segmento

Altri progetti

- Wikizionario contiene il lemma di dizionario «**retta**»
- Wikiversità contiene risorse sulla **retta**
- Wikimedia Commons (https://commons.wikimedia.org/wiki/?uselang=it) contiene immagini o altri file sulla **retta (https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Lines?uselang=it)**

Collegamenti esterni

-
- (EN) *Retta*, su *Enciclopedia Britannica*, Encyclopædia Britannica, Inc.
- (EN) Eric W. Weisstein, *Retta*, su *MathWorld*, Wolfram Research.

Controllo di autorità	Thesaurus BNCF 38400 (https://thes.bncf.firenze.sbn.it/termine.php?id=38400) · GND (DE) 4156780-8 (https://d-nb.info/gnd/4156780-8)

Estratto da "https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Retta&oldid=133567697"

Questa pagina è stata modificata per l'ultima volta il 18 mag 2023 alle 21:57.

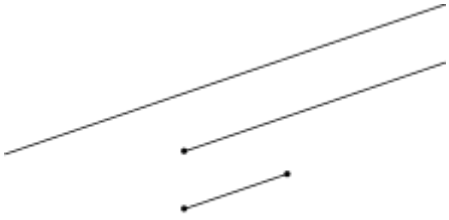
Il testo è disponibile secondo la licenza Creative Commons Attribuzione-Condividi allo stesso modo; possono applicarsi condizioni ulteriori. Vedi le condizioni d'uso per i dettagli.

Semiretta

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

Questa voce o sezione sull'argomento geometria non cita le fonti necessarie o quelle presenti sono insufficienti.

In geometria, la **semiretta** è l'insieme formato da un punto su una retta data e una delle due parti in cui tale retta viene divisa dal punto.



Retta, semiretta e segmento

Una definizione formale è la seguente: dati due punti O e P esiste una retta r che li contiene, la *semiretta* definita da O e P è l'insieme dei punti della retta r compresi tra O e P (inclusi gli stessi punti O e P) e dei punti di r tali che P è compreso tra O e il punto considerato. Il punto O è detto *punto d'origine* della semiretta. Ogni semiretta è univocamente determinata dall'origine e da un qualunque suo altro punto. Preso un punto Q della retta r tale che O è compreso tra P e Q, si ha che O e Q definiscono un'altra semiretta detta *semiretta opposta* a r.

Nel caso di un punto su una retta orientata è possibile dare la seguente definizione di semiretta: fissato un punto O su una retta orientata, si chiama *semiretta* il sottoinsieme della retta formato dal punto O e da tutti quelli che lo seguono (oppure che lo precedono, per ottenere la semiretta opposta).

Spazi vettoriali

Esiste una definizione più generale di semiretta valida in spazi vettoriali:

Semiretta

Sia V uno spazio vettoriale su un campo ordinato. Preso vettore non nullo $\boldsymbol{v} \in V$, una **semiretta uscente dall'origine** s è l'insieme dei multipli positivi di $\boldsymbol{v}$ più l'origine.

Una **semiretta** è invece un qualunque insieme che sia il traslato (secondo un qualunque vettore $\boldsymbol{u} \in V$) di una semiretta uscente dall'origine.

Voci correlate

- Retta
- Semipiano
- Semispazio
- Segmento
- Angolo

- Angolo solido

Altri progetti

- Wikizionario contiene il lemma di dizionario «**semiretta**»
- Wikimedia Commons (https://commons.wikimedia.org/wiki/?uselang=it) contiene immagini o altri file su **semiretta (https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Half-lines?uselang=it)**

Controllo di autorità	Thesaurus BNCF 30975 (https://thes.bncf.firenze.sbn.it/termine.php?id=30975) · GND (DE) 4158789-3 (https://d-nb.info/gnd/4158789-3)

Estratto da "https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Semiretta&oldid=126681345"

Questa pagina è stata modificata per l'ultima volta l'8 apr 2022 alle 19:57.

Il testo è disponibile secondo la licenza Creative Commons Attribuzione-Condividi allo stesso modo; possono applicarsi condizioni ulteriori. Vedi le condizioni d'uso per i dettagli.

WIKIPEDIA

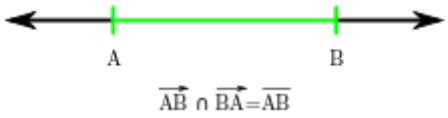
Segmento

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

*Disambiguazione – Se stai cercando altri significati, vedi **Segmento (disambigua)**.*

Questa voce o sezione sull'argomento geometria non cita le fonti necessarie o quelle presenti sono insufficienti.

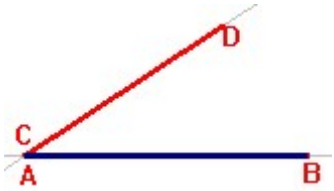
In geometria un **segmento** è una parte di retta compresa tra due punti, detti estremi.



I punti A e B danno origine ad un segmento (colore verde)

Quando i due estremi si trovano su una curva, il segmento è detto corda. Quando i due estremi sono vertici di un poligono, il segmento è detto lato se i due vertici sono adiacenti, altrimenti è detto diagonale.

Il segmento, generalmente, si indica con due lettere maiuscole dell'alfabeto latino, poste agli estremi (indicati da 2 punti). Essendo una linea, si può indicare anche con una lettera minuscola posta fra i due estremi, anche se questa notazione non è propriamente corretta.



Due segmenti consecutivi

Indice

- Terminologia
- Definizione astratta
- Altri progetti
- Collegamenti esterni

Terminologia

Due segmenti adiacenti

- Due segmenti sono consecutivi se hanno un estremo in comune e nessun altro punto;
- due segmenti si dicono congruenti se si possono sovrapporre in modo che coincidano punto per punto;
- due segmenti consecutivi sono adiacenti se appartengono alla stessa retta;
- due segmenti sono esterni se non hanno punti in comune;
- due segmenti si dicono incidenti quando hanno un solo punto in comune, detto di intersezione, tale non è estremo per entrambi;
- due segmenti si dicono coincidenti se hanno entrambi gli estremi in comune;

- due segmenti sono sovrapposti se hanno un estremo in comune e tutti i punti di uno (quello minore) sono in comune con i punti dell'altro segmento.

Definizione astratta

Due segmenti sovrapposti

In algebra lineare si può introdurre un concetto primitivo di segmento, costruito in un ambiente generico e astratto quale uno spazio vettoriale: si definisce "segmento" un sottoinsieme L di uno spazio vettoriale reale V che può essere descritto come

$$L = \{\mathbf{u}(1-t) + t\mathbf{v} \mid \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, t \in [0,1]\}$$

Gli estremi di L sono poi definiti come i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. Un segmento (chiuso) di estremi $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ può essere indicato con la scrittura $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, analoga alla notazione utilizzata nel caso 1-dimensionale per gli intervalli di $\mathbb{R}$.

Altri progetti

- Wikizionario contiene il lemma di dizionario «**segmento**»
- Wikimedia Commons (https://commons.wikimedia.org/wiki/?uselang=it) contiene immagini o altri file su **segmento (https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Line_segment?uselang=it)**

Collegamenti esterni

-
- (EN) Eric W. Weisstein, *Segmento*, su *MathWorld*, Wolfram Research.

Controllo di autorità	GND (DE) 4183620-0 (https://d-nb.info/gnd/4183620-0)

Estratto da "https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Segmento&oldid=131564352"

Questa pagina è stata modificata per l'ultima volta il 17 gen 2023 alle 19:30.

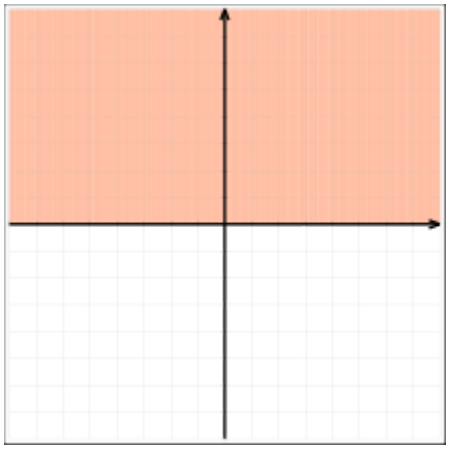
Il testo è disponibile secondo la licenza Creative Commons Attribuzione-Condividi allo stesso modo; possono applicarsi condizioni ulteriori. Vedi le condizioni d'uso per i dettagli.

Semipiano

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

> **Questa voce o sezione sull'argomento geometria non cita le fonti necessarie o quelle presenti sono insufficienti**.

In geometria è detto **semipiano** una delle parti di un piano delimitata da una retta giacente sullo stesso piano, denominata *origine* del semipiano. Il semipiano si definisce chiuso se e solo se contiene i punti dell'origine; altrimenti si parla di semipiano aperto (Vedere anche insieme chiuso e insieme aperto).



Semipiano

Dal momento che esiste un numero infinito di rette che giacciono su un piano, esistono anche infiniti modi di dividere un piano in due semipiani: uno chiuso, l'altro aperto.

Ogni semipiano costituisce un insieme convesso.

Un angolo piatto è un semipiano.

Voci correlate

- Semiretta

Altri progetti

- Wikizionario contiene il lemma di dizionario «**sempiano**»

Collegamenti esterni

-
- (EN) Eric W. Weisstein, *Semipiano*, su *MathWorld*, Wolfram Research.
- (EN) *Semipiano*, su *Encyclopaedia of Mathematics*, Springer e European Mathematical Society.

Estratto da "https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Semipiano&oldid=133180260"

Questa pagina è stata modificata per l'ultima volta il 25 apr 2023 alle 13:04.

Il testo è disponibile secondo la licenza Creative Commons Attribuzione-Condividi allo stesso modo; possono applicarsi condizioni ulteriori. Vedi le condizioni d'uso per i dettagli.

Piano (geometria)

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

> **Questa voce o sezione sull'argomento geometria non cita le fonti necessarie o quelle presenti sono insufficienti**.

Il **piano** è un concetto primitivo della geometria, ossia un concetto per il quale non esiste una definizione formale e che si suppone intuitivamente comprensibile e/o esperienzialmente acquisito, pertanto un'idea universalmente accettata e unica rappresentabile con oggetti concreti che fungono da esempio ma che per la loro sussistenza stessa non risolvono pienamente il concetto (gli altri concetti primitivi della geometria sono il punto e la retta).

Rappresentazione di due piani che si intersecano

Nel caso del piano per rappresentarlo idealmente si pensi a un foglio di carta di dimensioni infinite: il piano è l'idea, il concetto astratto, ma non è il foglio di carta sia perché questo ha uno spessore e un piano ideale non ne ha e sia perché non è possibile produrre o ritrovare un foglio di carta di dimensioni infinite.

In definitiva, esso:

- Inteso come luogo geometrico di punti, ha un'estensione superficiale: il piano, nello spazio tridimensionale, è l'insieme di tutti quei punti individuati dalla combinazione lineare di 2 vettori linearmente indipendenti applicati nel medesimo punto P.
- Dal punto di vista della geometria differenziale il piano è quella superficie che ha entrambe le curvature fondamentali nulle.

Le relazioni che intercorrono tra un piano e i punti e le rette che esso contiene sono espresse dagli assiomi di Euclide e dagli assiomi di Hilbert.

Indice

Piani nello spazio tridimensionale

Equazione cartesiana

Piano passante per tre punti

Posizioni reciproche di due piani

Distanza di un punto da un piano

Voci correlate

Altri progetti

Collegamenti esterni

Piani nello spazio tridimensionale

L'equazione canonica del piano nello spazio tridimensionale $\mathbb{R}^3$ è del tipo:

$$ax + by + cz + d = 0,$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, e a, b, c non tutti nulli.

Equazione cartesiana

Piano passante per tre punti

Siano $P_1 = (x_1, y_1, z_1), P_2 = (x_2, y_2, z_2), P_3 = (x_3, y_3, z_3)$ tre punti dello spazio non allineati. Per questi tre punti passa uno e un solo piano π. Un punto $P = (x, y, z)$ appartiene al piano π solo se il vettore $P - P_1$ è combinazione lineare dei vettori $P_2 - P_1$ e $P_3 - P_1$, ossia se

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Sviluppando il determinante con la regola di Laplace rispetto alla prima riga si ottiene:

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0,$$

dove

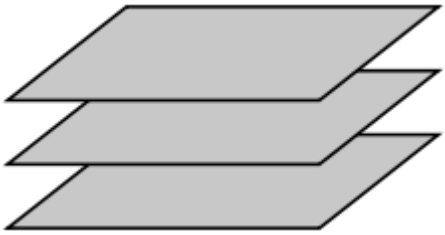
$$a = \begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}, \; b = -\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}, \; c = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}.$$

Infine, per ottenere l'equazione canonica del piano, si definisce d come segue:

$$d = -(ax_0 + by_0 + cz_0),$$

dove $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ è un punto che appartiene al piano, pertanto in questo caso si possono utilizzare le coordinate di un punto qualsiasi fra P_1, P_2 e P_3.

Posizioni reciproche di due piani



Piani paralleli

Si può studiare la posizione reciproca di due piani mettendo a sistema le loro equazioni. Quando la matrice dei coefficienti ha rango 2, il sistema è compatibile e risulta ammettere una semplice infinità (∞^1) soluzioni, che rappresentano tutti i punti della retta di intersezione tra i due piani. Quando sia la matrice dei coefficienti che la matrice completa hanno rango 1, le soluzioni ammesse sono una doppia infinità (∞^2) e i piani risultano essere paralleli e coincidenti (parallelismo improprio). Se infine la matrice dei coefficienti ha rango 1 e la matrice completa ha rango 2, il sistema risulta essere incompatibile e i piani sono paralleli e distinti (parallelismo proprio).

Distanza di un punto da un piano

È possibile calcolare la distanza di un punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ da un piano π utilizzando la seguente formula:

$$d(\pi, P) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

In particolare, se $d(\pi, P) = 0$, allora il punto P appartiene al piano π.

Voci correlate

- Problemi di misura (geometria descrittiva)
- Superficie (matematica)
- Spazio affine
- Fascio di piani
- Piano proiettivo

Altri progetti

- Wikimedia Commons (https://commons.wikimedia.org/wiki/?uselang=it) contiene immagini o altri file su **piano (https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Euclidean_planes?uselang=it)**

Collegamenti esterni

-
- (EN) Eric W. Weisstein, *Piano*, su *MathWorld*, Wolfram Research.

Controllo di autorità	Thesaurus BNCF 23216 (https://thes.bncf.firenze.sbn.it/termine.php?id=23216) · GND (DE) 4150968-7 (https://d-nb.info/gnd/4150968-7)

Estratto da "https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Piano_(geometria)&oldid=133377427"

Questa pagina è stata modificata per l'ultima volta il 6 mag 2023 alle 21:58.

Il testo è disponibile secondo la licenza Creative Commons Attribuzione-Condividi allo stesso modo; possono applicarsi condizioni ulteriori. Vedi le condizioni d'uso per i dettagli.

WIKIPEDIA

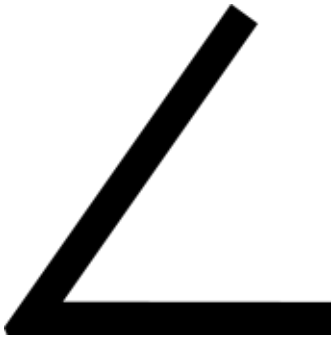
Angolo

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

*Disambiguazione – Se stai cercando altri significati, vedi **Angolo (disambigua)**.*

Questa voce o sezione sull'argomento geometria non cita le fonti necessarie o quelle presenti sono insufficienti.

Un **angolo** (dal latino *angulus*, dal greco ἀγκύλος (*ankýlos*), derivazione dalla radice indoeuropea *ank*, piegare, curvare), in matematica, indica ciascuna delle due porzioni di piano comprese tra due semirette aventi la stessa origine. Si può definire anche **angolo piano** per distinguerlo dal concetto derivato di angolo solido. Le semirette vengono dette lati dell'angolo, e la loro origine vertice dell'angolo. Il termine, così definito, riguarda nozioni di larghissimo uso, innanzitutto nella geometria e nella trigonometria.



∠ è il simbolo dell'angolo

A ogni angolo si associa un'ampiezza, la misura correlata alla posizione di una semiretta rispetto all'altra e pertanto alla conformazione della porzione di piano costituente l'angolo: essa si esprime in gradi sessagesimali, in gradi sessadecimali, in gradi centesimali o in radianti, sempre con valori reali.

Associando all'angolo un verso si introducono le ampiezze degli angoli con segno, che consentono di definire funzioni trigonometriche con argomenti reali anche negativi. Le ampiezze con segno forniscono contributi essenziali alle possibilità del calcolo infinitesimale e alle applicazioni alla fisica classica e alle conseguenti discipline quantitative.

Indice

- **Angolo convesso e concavo**
- **La misurazione dell'ampiezza degli angoli convessi e concavi**
  - Considerazioni preliminari
  - Dalla misura dell'angolo alla misura dell'ampiezza dell'angolo
    - Sistemi di misurazione dell'ampiezza dell'angolo
    - Conversioni angolari
  - Ampiezze di angoli particolari
  - Angoli complementari
  - Angoli opposti al vertice
  - Angoli formati da rette tagliate da una trasversale
  - Somma degli angoli interni
- **Angoli con segno**
- **Angoli solidi**
- **Note**
- **Voci correlate**
- **Altri progetti**

Collegamenti esterni

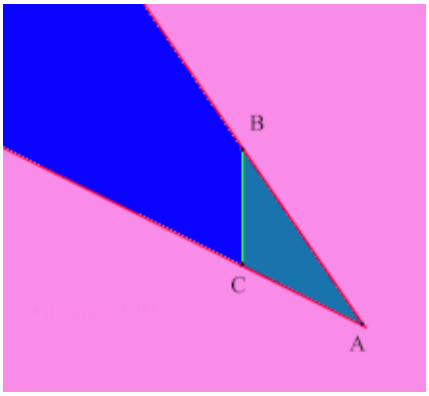
Angolo convesso e concavo

Angolo convesso

Si chiama angolo concavo l'angolo che contiene i prolungamenti delle semirette (lati) che lo formano. L'angolo convesso è la porzione di piano che non contiene i prolungamenti delle semirette che dividono il piano. Gli angoli convessi hanno ampiezza compresa tra 0 e 180 gradi sessagesimali, da 0 a 200 gradi centesimali, da 0 a π radianti; mentre l'ampiezza degli angoli concavi misura tra 180 e 360 gradi, da 200 a 400 gradi centesimali, da π a 2π radianti. Le ampiezze sono sempre non negative.

Se le semirette sono diverse, ma appartengono alla stessa retta R, ciascuno dei due semipiani definiti da R muniti del vertice (che distingue le semirette) si dice angolo piatto.

A parte il caso particolare dell'angolo piatto, il piano si tripartisce in tre insiemi: la *frontiera dell'angolo*, ossia l'insieme dei punti appartenenti alle due semirette S e T, tra cui il vertice, e due insiemi connessi K_1 e K_2 e separati dai punti della frontiera. Di questi due insiemi, solo K_1 è costituito da punti che appartengono a segmenti con un estremo su una semiretta e l'altro sull'altra; in altre parole solo K_1 è un insieme convesso. Il terzo insieme K_2 non è convesso. Si definisce *angolo convesso* determinato da S e T l'unione di questo insieme convesso e della frontiera, $K_1 \cup S \cup T$. Si definisce *angolo concavo* determinato da S e T l'unione del terzo insieme non convesso e della frontiera, $K_2 \cup S \cup T$. I due angoli definiti dalle due semirette si dicono angoli esplementari.



Angolo e triangolo ABC come suo sottoinsieme.

Angoli convessi e concavi sono sottoinsiemi illimitati del piano, quindi sono insiemi non misurabili attraverso la loro area che ha valore infinito. Spesso con angolo (convesso) si indica anche la parte di piano delimitata da due segmenti con un estremo in comune (vertice). Si può ricondurre questa definizione alla precedente prolungando i due segmenti dalla parte del loro estremo diverso dal vertice per ottenere le due semirette. Questa estensione della definizione rende lecito assegnare a ogni triangolo tre angoli (convessi) associati biunivocamente ai suoi tre vertici.

Tuttavia il triangolo, essendo un sottoinsieme chiuso e limitato del piano, ha area finita, infatti esso è l'intersezione degli angoli corrispondenti ai suoi tre vertici.

La misurazione dell'ampiezza degli angoli convessi e concavi

Considerazioni preliminari

È naturale porsi il problema di "misurare un angolo": gli angoli possono servire per tante costruzioni e se a essi si associano misure numeriche ci si aspetta che per molte costruzioni possano essere utili calcoli numerici su queste misure.

Il problema della misura di un angolo non può essere risolto attraverso una misura della sua superficie che non è limitata e che comunque non sarebbe significativa nemmeno nel caso di angoli sottesi da segmenti come nel caso del triangolo: si considerino per esempio triangoli simili.

Se si hanno due angoli convessi o concavi A e B con lo stesso vertice e B è sottoinsieme di A (situazione che si determina solo se i lati di B sono sottoinsiemi di A) è ragionevole chiedere che la misura di A sia maggiore della misura di B.

Dato un angolo convesso A, si dice *semiretta bisettrice* dell'angolo la semiretta avente il vertice di A come estremo e i cui punti sono equidistanti dai lati di A. Si può costruire facilmente la bisettrice con un compasso. La semiretta bisettrice di un angolo concavo si definisce come la semiretta avente come estremo il vertice dell'angolo allineata con la bisettrice del suo angolo (convesso) esplementare.

La semiretta bisettrice B di un angolo A convesso o concavo e ciascuno dei suoi due lati determinano due angoli convessi. La riflessione rispetto alla retta contenente la B scambia i due lati di A e trasforma uno dei due angoli nell'altro. È quindi ragionevole attribuire ai due angoli determinati dalla bisettrice una misura che sia la metà della misura di A. È altrettanto ragionevole considerare che le misure dei due angoli determinati dalla semiretta bisettrice siano la metà della misura dell'angolo di partenza. Il processo di dimezzamento di un angolo può essere ripetuto N volte con N grande a piacere.

Un angolo convesso si dice *angolo retto* se i suoi due lati sono ortogonali, cioè un angolo retto è la metà di un angolo piatto.

Un angolo convesso contenuto in un angolo retto avente il suo stesso vertice si dice *angolo acuto*. Un angolo convesso contenente un angolo retto avente lo stesso vertice si dice *angolo ottuso*.

Due angoli A e B che hanno in comune solo una semiretta e non hanno alcun punto interno in comune si dicono *angoli consecutivi*. Se due angoli consecutivi hanno le semirette non in comune opposte (cioè la loro unione è una retta) allora si dicono *angoli adiacenti*. Per quanto riguarda gli angoli consecutivi, se questi sono angoli convessi la loro unione è un angolo che potrebbe essere convesso o concavo: si tratta dell'angolo definito dalle due semirette che sono i lati di uno solo dei due angoli. A questo angolo unione è ragionevole assegnare come misura la somma delle misure degli angoli consecutivi. L'angolo unione si dice "somma" dei due angoli A e B.

In base alle considerazioni precedenti è lecito attribuire agli angoli misure costituite da numeri reali.

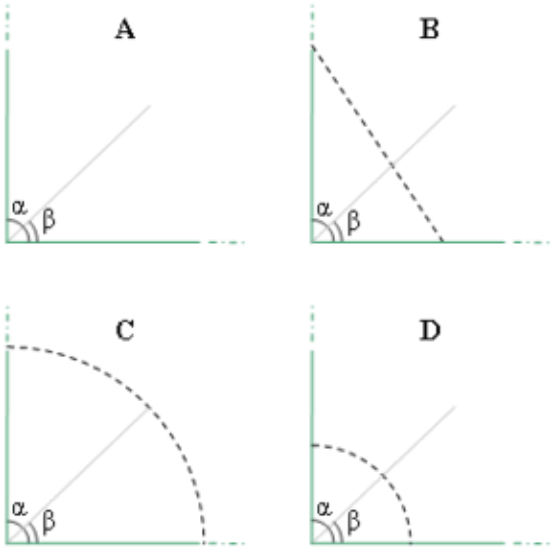
Due angoli trasformabili l'uno nell'altro mediante isometrie si dicono congruenti. Evidentemente una misura degli angoli invariante per le isometrie costituisce uno strumento con molti vantaggi: in particolare consente di individuare le classi di congruenza degli angoli. Quindi si chiede una misura degli angoli a valori reali e invariante per congruenza.

Dalla misura dell'angolo alla misura dell'ampiezza dell'angolo

Se l'angolo è definito come la porzione del piano tra due semirette, la sua unità di misura dovrebbe essere una lunghezza al quadrato, ma questa misura non ha né significato né utilità pratica. Si è quindi pensato di considerare non la misura dell'angolo in sé, ma quella dell'ampiezza *del movimento* che porta una delle semirette a sovrapporsi all'altra.

Come giungere a determinare l'ampiezza di un angolo ha certamente chiesto maggiori sforzi all'intelletto umano di quanti ne abbia richiesti la misurazione di lunghezze e superfici. Misurare significa esprimere una grandezza A in rapporto a un'altra grandezza data, a essa omogenea, che funge da unità di misura. Se questo processo sorge abbastanza spontaneo per le grandezze spaziali, per cui basta ripetere un segmento o affiancare un quadrato U per n volte fino all'esaurimento della lunghezza o della superficie ($A = nU$), lo stesso diventa meno intuitivo per le grandezze angolari, dove pure la stessa elaborazione mentale di un'unità di misura adatta richiede un maggior grado di astrazione.

Si prendano in considerazione i quattro angoli di ampiezza α della figura. Volendoli quantificare con l'area delimitata dai lati in verde, prolungando i lati a infinito nel caso A si ottiene un'area infinita e nei restanti casi B, C e D, considerando solo le superfici entro le linee tratteggiate, tre aree determinate e quindi misurabili, ma visibilmente diverse fra loro, seppur originate dal medesimo angolo. Si presuma inoltre di dividere α esattamente in due angoli uguali, in modo che sia esprimibile in rapporto a questi ultimi, come $\alpha = 2\beta$, β. Per quanto detto sopra, β può quindi essere considerato un'*unità di misura* e, se ora se ne considera l'area, l'uguaglianza sarà soddisfatta soltanto dai casi C e D, ma non da B, dove i due triangoli hanno aree diverse, pur trattandosi di due angoli β perfettamente sovrapponibili. Ne discende che l'angolo non può essere misurato idoneamente in termini di area.



Si immagini quindi una semiretta che partendo dalla posizione verticale giri attorno al proprio estremo fino a diventare orizzontale; la semiretta ha compiuto un angolo α e nel suo movimento ha coperto la superficie compresa tra le due semirette. Sovrapponendo idealmente le immagini C e D si nota che, come in un compasso, allontanandosi dal centro di rotazione ogni punto traccia sul piano un arco più lungo, pur mantenendo immutato il rapporto fra lunghezza di quest'ultimo e il raggio. Inoltre se la semiretta compisse soltanto l'angolo β la lunghezza degli archi prodotti sarebbe invariabilmente la metà della lunghezza degli archi loro omologhi in α.

Si consideri ora una rotazione completa che riporta la semiretta alla posizione di partenza, cioè un angolo di massima ampiezza. In questo caso la semiretta copre l'intera superficie del piano tracciando infinite circonferenze; prendendo una qualunque di queste e segmentandola in n parti uguali, si possono individuare per ogni arco altrettante porzioni di piano equipollenti, in pratica una generica unità di misura per l'angolo. Dunque soltanto capendo che la misurazione dell'angolo non può essere avvenire quantificando un'area si comprende che bisogna astrarre il concetto di angolo come parte del piano e considerarlo invece cinematicamente come una porzione di superficie coperta da una semiretta in rotazione sul proprio estremo. Solo in questo modo è possibile misurarlo.

Sebbene questa nozione non sia immediata, deve comunque trattarsi di una conquista concettuale antica, se il sistema per la misurazione degli angoli comunemente più utilizzato ancora oggi, il sistema sessagesimale, è giunto sino noi dall'antica civiltà babilonese invariato nei secoli.

Sistemi di misurazione dell'ampiezza dell'angolo

Nel sistema sessagesimale l'angolo completo o *angolo giro* è suddiviso in 360 spicchi, equivalenti all'unità di misura convenzionale denominata grado sessagesimale, indicata col simbolo °. La ragione della divisione in 360 parti dell'angolo giro è riconducibile all'uso astronomico che i babilonesi facevano di questa misura: dato che il Sole compie un giro completo sulla volta celeste nell'arco di un anno, a quel tempo stimato di circa 360 giorni, un grado corrisponde pressappoco allo spostamento del Sole sull'eclittica in un giorno.

Il nome "grado sessagesimale" deriva dal fatto che le sottounità del grado, il minuto e il secondo, sono divise in sessantesimi; perciò, come nell'orologio, ogni grado è diviso in 60 minuti primi indicati col simbolo $'$ e chiamati semplicemente minuti, e ogni minuto è diviso in 60 minuti secondi indicati col simbolo $''$ e chiamati semplicemente secondi. Ulteriori suddivisioni del secondo seguono invece il comune sistema decimale. Questa suddivisione deriva dal fatto che nell'antica Babilonia era in auge un sistema numerico su base sessagesimale, giunto sino a noi quale retaggio storico nell'orologio e sui goniometri.

L'ampiezza di un angolo potrebbe quindi essere espresso in una forma tipo: $57° \ 17' \ 44{,}8''$.

Nel tempo sono poi stati adottati altri sistemi di misurazione nel tentativo di rendere più agevole la misura dell'ampiezza dell'angolo. Alla fine del Settecento non sfuggì ai tentativi di razionalizzazione neppure il sistema sessagesimale: venne proposto un sistema centesimale, basato appunto sul grado centesimale quale centesima parte nell'angolo retto, eletto ad angolo fondamentale per sostituire il 90 col più tondo e comodo 100, anche se trovò utilizzo pratico soltanto attorno al 1850 quando Ignazio Porro[1] lo usò per costruire i suoi primi strumenti a divisione centesimale. Con questo sistema l'angolo giro viene diviso in 400 spicchi uguali con sottomultipli a frazioni decimali. Si tratta ancora di una unita di misura convenzionale non motivata da alcuna ragione matematica.

Dallo sviluppo dell'analisi infinitesimale guadagnò sempre più importanza un'altra unita di misura, per certi aspetti più "motivata" o "naturale": il *radiante*, inteso come rapporto tra la lunghezza di un arco di circonferenza e il raggio della circonferenza stessa in quanto questo rapporto non dipende dal raggio, ma solo dall'angolo compreso. In questo modo l'angolo giro misura 2π, cioè il rapporto tra la lunghezza della circonferenza e il suo raggio.

Riepilogando, per misurare l'ampiezza dell'angolo i sistemi di misura più attestati sono:

- il *sistema centesimale*, con unità di misura il grado centesimale;
- il *sistema sessagesimale*, con unità di misura il grado sessagesimale;
- il *sistema sessadecimale*, con unità di misura il grado sessadecimale. È una variante del precedente con divisione dell'angolo giro in 360 parti in cui i sottomultipli dei gradi sono espressi in forma decimale;
- il *sistema radiante*, o *sistema matematico*, con unità di misura il radiante.
- in ambito militare si usa anche il millesimo di radiante, detto comunemente "millesimo", che viene impiegato per determinare gli scarti e relative correzioni nei tiri con l'artiglieria. Su una circonferenza avente raggio un km equivale a una corda lunga un metro. Per esempio, per correggere un colpo caduto 100 metri a destra di un bersaglio posto alla distanza di 10 km bisognerà apportare una correzione di 10°° (millesimi) rosso. La scala graduata che si osserva all'interno di alcuni binocoli è espressa in millesimi di radianti, il colore rosso significa rotazione verso sinistra mentre il colore verde significa rotazione verso destra.

Il primo viene più che altro usato in ambito strettamente topografico, mentre gli ultimi sono quelli maggiormente usati, il secondo per consuetudine il terzo per una maggiore semplicità dei calcoli nelle formule matematiche. La relazione che lega il sistema radiante e il sistema sessagesimale e permette il passaggio da uno all'altro è

$$\frac{180^\circ}{\alpha} = \frac{\pi}{x},$$

dove α è la misura dell'ampiezza dell'angolo espresso in gradi e x è la misura espressa in radianti.

Conversioni angolari

Indicando l'ampiezza di un angolo con:

$\alpha^\circ\ p'\ s''$ nel sistema sessagesimale, dove α, p, s sono rispettivamente i gradi, primi e secondi d'arco (numeri interi)
α° nel sistema sessadecimale
α^{gon} nel sistema centesimale
α^{rad} nel sistema matematico,

indicando con $Int[\ ]$ la parte intera di un numero reale e ricordando che vale la proporzione generale

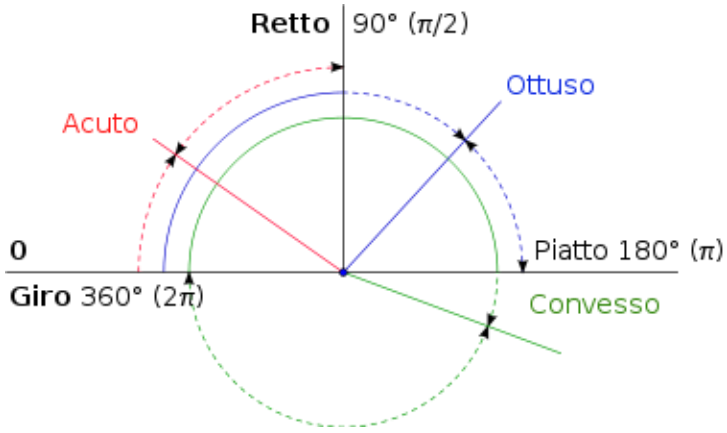
$$\frac{\alpha^{rad}}{\pi} = \frac{\alpha^\circ}{180} = \frac{\alpha^{gon}}{200}$$

valgono le seguenti formule di conversione da un sistema di misura all'altro

Conversione da ↓ a⟶	Sessagesimale	Sessadecimale	Centesimale	Matematico
Sessagesimale		$\alpha^\circ = \alpha + \frac{p}{60} + \frac{s}{3600}$	$\alpha^{gon} = \frac{10}{9}\alpha^\circ$ dove α° è calcolato con la formula precedente	$\alpha^{rad} = \frac{\pi}{180}\alpha^\circ$ dove α° è calcolato con la formula precedente
Sessadecimale	$\alpha = Int[\alpha^\circ]$ $p = Int[(\alpha^\circ - \alpha)\cdot 60]$ $s = (((\alpha^\circ - \alpha)\cdot 60) - p)\cdot 60$		$\alpha^{gon} = \frac{10}{9}\alpha^\circ$	$\alpha^{rad} = \frac{\pi}{180}\alpha^\circ$
Centesimale	$\alpha^\circ = \frac{9}{10}\alpha^{gon}$ quindi si applicano le formule precedenti per la conversione da sessadecimale a sessagesimale	$\alpha^\circ = \frac{9}{10}\alpha^{gon}$		$\alpha^{rad} = \frac{\pi}{200}\alpha^{gon}$
Matematico	$\alpha^\circ = \frac{180}{\pi}\alpha^{rad}$ quindi si applicano le formule precedenti per la conversione da sessadecimale a sessagesimale	$\alpha^\circ = \frac{180}{\pi}\alpha^{rad}$	$\alpha^{gon} = \frac{200}{\pi}\alpha^{rad}$	

Ampiezze di angoli particolari

Lo stesso argomento in dettaglio: ***Angolo acuto***, ***Angolo ottuso***, ***Angolo retto***, ***Angolo piatto*** *e* ***Angolo giro***.



- Un *angolo acuto* ha ampiezza inferiore a quella di un angolo retto, ossia

  $0^\circ < \alpha < 90^\circ (\pi/2).$

- Un *angolo retto* ha l'ampiezza uguale a un quarto dell'ampiezza di un angolo giro, ossia

  $\alpha = 90^\circ\,(\pi/2).$

- Un *angolo ottuso* ha l'ampiezza compresa fra quelle di un angolo retto e di un angolo piatto, ossia

  $90^\circ\,(\pi/2) < \alpha < 180^\circ\,(\pi).$

- Un *angolo piatto* ha ampiezza pari a metà di quella di un angolo giro, ossia

  $\alpha = 180^\circ\,(\pi).$

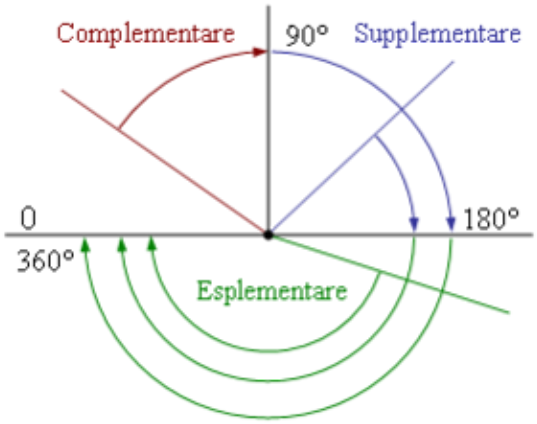
- Un *angolo giro* ha ampiezza uguale a

  $\alpha = 360^\circ\,(2\pi)$
  e corrisponde a una rotazione completa di una semiretta intorno al suo estremo.

- Un *angolo concavo* ha ampiezza maggiore di quella di un angolo piatto, $\alpha > 180^\circ.$
- Un *angolo convesso* ha ampiezza minore di quella di un angolo piatto, $\alpha < 180^\circ.$

Angoli complementari

Nella nomenclatura degli angoli di ampiezza compresa tra 0 e 360° si è soliti usare aggettivi particolari per gli angoli associati a un angolo dato in quanto suoi "angoli di complemento" rispetto agli angoli fondamentali retto, piatto e giro.



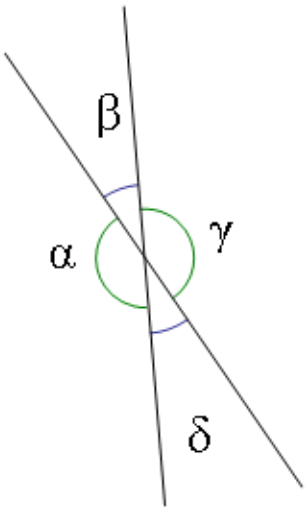
Si dice complementare di un angolo di ampiezza α ogni angolo avente come ampiezza la β "mancante" per ottenere un angolo retto, cioè tale che sia $\beta = 90^\circ - \alpha$. Da questa definizione segue che due angoli complementari devono essere entrambi acuti e che ha senso attribuire un complementare solo a un angolo acuto.

Si dice supplementare di un angolo di ampiezza α ogni angolo avente come ampiezza la β "mancante" per ottenere un angolo piatto, cioè tale che sia $\beta = 180^\circ - \alpha$. Da questa definizione segue che ogni supplementare di un angolo acuto è un angolo ottuso e viceversa, mentre ogni supplementare di un angolo retto è anch'esso un angolo retto. Quando due angoli supplementari sono anche *consecutivi*, cioè hanno in comune solo una semiretta, vengono detti anche angoli *adiacenti*.

Si dice esplementare di un angolo di ampiezza α ogni angolo avente come ampiezza la β "mancante" per ottenere un angolo giro, cioè tale che sia $\beta = 360^\circ - \alpha$. Ne segue che ogni esplementare di un angolo concavo è un angolo convesso e viceversa, mentre ogni esplementare di un angolo piatto è anch'esso piatto.

Angoli opposti al vertice

Due rette che si intersecano dividono il piano in quattro angoli; considerato uno qualsiasi di questi angoli: due degli altri gli sono adiacenti mentre il terzo, con cui condivide solo il vertice, è detto *angolo opposto al vertice*. Due angoli sono tra loro opposti al vertice se i prolungamenti dei lati di uno risultano essere i lati dell'altro.



Sono adiacenti gli angoli delle coppie (α, β), (β, γ), (γ, δ) e (α, δ).

Sono invece opposti al vertice gli angoli delle coppie (α, γ) e (β, δ).

Teorema degli angoli opposti al vertice

Due angoli opposti al vertice sono sempre congruenti.

Dimostrazione

Per definizione, due angoli adiacenti equivalgono a un angolo piatto, per cui valgono le seguenti uguaglianze

$$\alpha + \beta = 180° \qquad \beta + \gamma = 180°$$

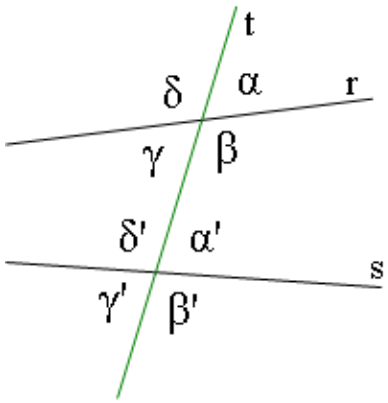
da cui

$$\alpha + \beta = \beta + \gamma$$

$$\alpha = \gamma$$ cvd.

Angoli formati da rette tagliate da una trasversale

Quando sul piano due rette distinte r e s vengono tagliate da un trasversale t (incidente sia ar che a s), si originano otto angoli ognuno dei quali è posto in relazione con quelli che non hanno lo stesso vertice.



Con riferimento ai due semipiani separati dalla trasversale t, sono definiti *coniugati* due angoli con vertici distinti disposti sullo stesso semipiano. Rispetto alle rette r e s, invece, sono definiti *esterni* due angoli con vertici distinti che non intersecano la retta su cui giace un lato dell'altro angolo, mentre sono considerati *interni* due angoli con vertici distinti che intersecano la retta su cui giace un lato dell'altro angolo. Sono inoltre definiti *corrispondenti* due angoli coniugati tali che un lato di uno dei due angoli è contenuto in un lato dell'altro angolo. Con riferimento alla figura si ha la seguente esemplificazione.

- Sono corrispondenti le coppie:

  $\alpha, \alpha'; \quad \beta, \beta'; \quad \gamma, \gamma'; \quad \delta, \delta'.$

- Sono coniugati interni le coppie:

  $\beta, \alpha'; \quad \gamma, \delta'.$

- Sono coniugati esterni le coppie:

  $\alpha, \beta'; \quad \delta, \gamma'.$

- Sono alterni interni le coppie:

  $\beta, \delta'; \quad \gamma, \alpha'.$

- Sono alterni esterni le coppie:

  $\alpha, \gamma'; \quad \delta, \beta'.$

Nel caso in cui le due rette r e s siano parallele gli angoli corrispondenti e gli angoli alterni, dello stesso tipo, sono congruenti. Invece gli angoli coniugati, anch'essi dello stesso tipo, sono supplementari.

Somma degli angoli interni

Nella geometria euclidea la somma degli angoli interni di un triangolo è sempre di 180 gradi. Più in generale, data una qualunque figura geometrica convessa di n lati, la somma di tutti i suoi angoli interni è uguale a $(n-2) \times 180$ gradi. Quindi, per esempio, la somma totale di tutti gli angoli interni di un quadrilatero è uguale a $(4-2) \times 180 = 2 \times 180 = 360$ gradi. Un caso particolare è dato dal quadrato, che ha quattro angoli retti, la cui somma è infatti 360 gradi. Analogamente, la somma di tutti gli angoli interni di un pentagono, regolare o meno, è uguale a 540 gradi.

In altre geometrie, dette non euclidee, la somma degli angoli interni di un triangolo può assumere sia valori maggiori sia valori minori di 180 gradi.

Angoli con segno

Molti problemi portano ad ampliare la nozione di angolo in modo da disporre di un'entità a cui si possa attribuire un'ampiezza data da un numero reale e quindi anche superiore a 360 gradi e negativa. Per questo occorre abbandonare l'associazione angolo - sottoinsieme del piano. Si dice che un angolo α è maggiore di un angolo β quando una parte di angolo α è congruente all'angolo β. Un angolo convesso o concavo può essere descritto cinematicamente come la parte di piano "spazzata" da una semiretta mobile che ruota mantenendo fisso il suo estremo; questo è il vertice dell'angolo e le posizioni iniziale e finale della semiretta sono i lati dell'angolo. Questa descrizione porta a distinguere due versi del movimento rotatorio. Si definisce *verso negativo* o *verso orario* il verso della rotazione che, osservata dal di sopra del piano, corrisponde al movimento delle lancette di un orologio tradizionale; si definisce *verso positivo* o *verso antiorario* il verso opposto (ad esempio $-135^\circ = -\frac{3}{4}\pi = 225^\circ = \frac{5}{4}\pi$).

Per sviluppare considerazioni quantitative si considera una circonferenza Γ il cui centro ha il ruolo del vertice V per gli angoli che si prendono in considerazione. Il raggio r di questa circonferenza può essere scelto ad arbitrio e talora risulta comodo avere $r = 1$; quando si riferisce il piano a una coppia di assi cartesiani risulta comodo porre il vertice degli angoli nell'origine, in modo che la circonferenza corrisponda all'equazione $x^2 + y^2 = r^2$.

Ogni angolo di vertice V determina un arco sulla circonferenza. Si consideri ora un movimento di una semiretta con estremo in V in un verso o nell'altro da una posizione iniziale S fino a una posizione finale T: esso determina sulla Γ un *arco orientato* che ha come estremo iniziale il punto in cui Γ viene intersecata dalla S e come estremo finale il punto in cui viene intersecato dalla T. Si può pensare l'arco orientato come se fosse "tracciato" dalla penna di un compasso avente l'altro braccio nel punto V. Gli archi orientati con verso positivo si possono chiamare semplicemente archi (di circonferenza) positivi, quelli con verso negativo archi negativi.

Si può estendere la nozione di arco orientato pensando che il compasso possa compiere più di un giro, in verso positivo o negativo.

Si possono identificare gli angoli convessi con gli angoli relativi agli archi positivi interamente contenuti in una semicirconferenza; gli angoli concavi con gli archi positivi che contengono una semicirconferenza e sono contenuti in una circonferenza.

A questo punto si possono definire come *angoli con segno* di vertice V le entità che generalizzano gli angoli convessi e concavi con vertice in V e sono associate biunivocamente agli archi orientati sulla circonferenza Γ.

Gli angoli con segno possono essere sommati senza le restrizioni degli angoli associati a parti di piano e gli archi relativi risultano essere giustapposti; angolo opposto a un angolo dato corrisponde all'arco considerato con il verso opposto. Di conseguenza agli angoli con segno si attribuisce un'ampiezza rappresentata da un numero reale tale che alla somma di due angoli con segno corrisponda la somma algebrica delle ampiezze.

A questo punto si è indotti naturalmente ad associare all'ampiezza di un angolo con segno la lunghezza con segno del corrispondente arco. Questo richiede di precisare cosa si intenda per lunghezza di un arco e più in particolare richiede di definire la lunghezza di una circonferenza

Le considerazioni sulla rettificazione di una circonferenza portano alla definizione del numero π e, sul piano computazionale, alle valutazioni del suo valore.

Angoli solidi

Lo stesso argomento in dettaglio: ***Angolo solido***.

Un angolo solido è un'estensione allo spazio tridimensionale del concetto di angolo.

Note

1. ^ Strumenti navali (http://www.sullacrestadellonda.it/strumenti/glossario_topografico.htm) Archiviato (https://web.archive.org/web/20060609081238/http://www.sullacrestadellonda.it/strumenti/glossario_topografico.htm) il 9 giugno 2006 in Internet Archive.

Voci correlate

- Angolo solido
- Geometria
- Goniometro
- Pendenza topografica
- Trigometro
- Zenit

Altri progetti

- Wikizionario contiene il lemma di dizionario «**angolo**»
- Wikimedia Commons (https://commons.wikimedia.org/wiki/?uselang=it) contiene immagini o altri file su **angolo (https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Angles_(geometry)?uselang=it)**

Collegamenti esterni

-
- (EN) *Angolo*, su *Enciclopedia Britannica*, Encyclopædia Britannica, Inc.
- (EN) Eric W. Weisstein, *Angolo*, su *MathWorld*, Wolfram Research.
- (EN) *IUPAC Gold Book, "angle"*, su *goldbook.iupac.org*.

Controllo di autorità	Thesaurus BNCF 30974 (https://thes.bncf.firenze.sbn.it/termine.php?id=30974) · LCCN (EN) sh85005042 (http://id.loc.gov/authorities/subjects/sh85005042) · GND (DE) 4189964-7 (https://d-nb.info/gnd/4189964-7) · BNF (FR) cb14519948f (https://catalogue.bnf.fr/ark:/12148/cb14519948f) (data) (https://data.bnf.fr/ark:/12148/cb14519948

	f) · J9U (EN, HE) 987007294852305171 (http://uli.nli.org.il/F/?func=find-b&local_base=NLX10&find_code=UID&request=987007294852305171)

Estratto da "https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Angolo&oldid=125299374"

Questa pagina è stata modificata per l'ultima volta il 26 gen 2022 alle 16:11.

Il testo è disponibile secondo la licenza Creative Commons Attribuzione-Condividi allo stesso modo; possono applicarsi condizioni ulteriori. Vedi le condizioni d'uso per i dettagli.

WIKIPEDIA

Triangolo

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

*Disambiguazione – Se stai cercando altri significati, vedi **Triangolo (disambigua)**.*

Il **triangolo** è un poligono con tre lati.

Indice

Caratteristiche del triangolo

Classificazione dei triangoli

- Triangoli degeneri e triangoli ideali

Punti notevoli

Formulario

- Formule trigonometriche
- Formule analitiche

Geometrie non euclidee

Teoremi sui triangoli

Note

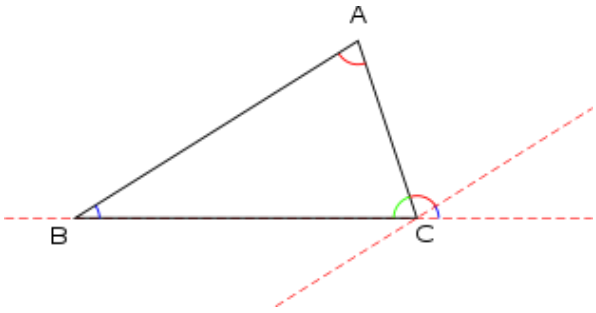
Voci correlate

Altri progetti

Collegamenti esterni

Caratteristiche del triangolo

Il triangolo è caratterizzato dalle seguenti proprietà:



La somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a 180°.

1. è una "figura indeformabile", dato che, assegnate le lunghezze dei lati, sono univocamente determinati anche gli angoli; ciò non è vero in generale per poligoni con un numero maggiore di lati;
2. è l'unico poligono che non può essere concavo;
3. è l'unico poligono per cui non è richiesto che sia regolare perché sia sempre possibile circoscrivere e inscrivere una circonferenza, perché per tre punti passa sempre una e una sola circonferenza;
4. la somma degli angoli interni è uguale a un angolo piatto, ossia 180°; va comunque precisato che tale uguaglianza vale soltanto nella geometria euclidea e non in altri tipi di geometria come la geometria sferica e quella iperbolica, dove invece tale somma è, rispettivamente, maggiore e minore di 180°;
5. la somma di due lati deve essere sempre maggiore del terzo lato o la differenza di due lati deve essere sempre minore del terzo lato.

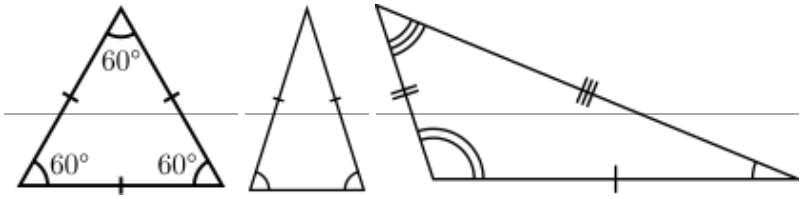
Due triangoli sono congruenti se soddisfano almeno uno dei criteri di congruenza.

Due triangoli si dicono simili se soddisfano almeno uno dei criteri di similitudine.

Classificazione dei triangoli

I triangoli possono essere classificati in base alla lunghezza relativa dei lati:

- In un **triangolo equilatero** tutti i lati hanno lunghezza uguale. Un triangolo equilatero si può definire equivalentemente come triangolo equiangolo, ovvero triangolo avente i suoi angoli interni di uguale ampiezza, pari a 60°.
- In un **triangolo isoscele** due lati hanno lunghezza uguale. Un triangolo isoscele si può definire equivalentemente come triangolo avente due angoli interni di uguale ampiezza.
- In un **triangolo scaleno** tutti i lati hanno lunghezze differenti. Un triangolo scaleno si può definire equivalentemente come triangolo avente i tre angoli interni di diverse ampiezze [1].

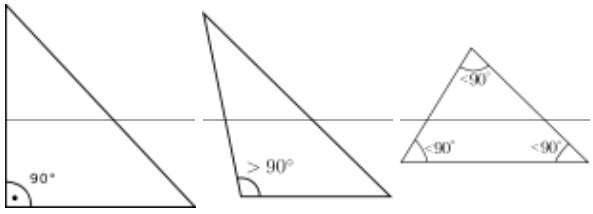


Equilatero Isoscele Scaleno

I triangoli possono essere classificati anche in base alle dimensioni del loro angolo interno più ampio; sono descritti di seguito usando i gradi d'arco.

- Un **triangolo rettangolo** (o **triangolo retto**) ha un angolo interno di 90°, cioè un angolo retto. Il lato opposto all'angolo retto è detto *ipotenusa*; è il lato più lungo del triangolo rettangolo. Gli altri due lati del triangolo sono detti *cateti*. Per questo triangolo vale il teorema di Pitagora.
- Un **triangolo ottusangolo** (o **triangolo ottuso**) ha un angolo interno maggiore di 90°, cioè un angolo ottuso.
- Un **triangolo acutangolo** (o **triangolo acuto**) ha tutti gli angoli interni minori di 90°, cioè ha tre angoli acuti.
- Un **triangolo equiangolo**, cioè se ha tutti gli angoli interni uguali, cioè di 60°, cioè se e solo se è un **triangolo equilatero**.

Per i triangoli che non sono rettangoli vale una generalizzazione del teorema di Pitagora nota in trigonometria come teorema di Carnot.



Rettangolo Ottusangolo Acutangolo

Triangoli degeneri e triangoli ideali

Si dice **triangolo degenere** un triangolo che presenta un angolo di 180°. Gli altri due angoli hanno necessariamente ampiezza zero, ed un lato misura quanto la somma degli altri due: tale triangolo, come insieme di punti (graficamente), costituisce un segmento.

Si usa il termine *triangolo degenere* anche per una figura ottenuta come limite di un triangolo nel quale alcuni dei suoi vertici vanno all'infinito; tale figura si chiama anche **triangolo ideale**. Questa costruzione è molto usata in geometria iperbolica.

Un triangolo ideale con un vertice all'infinito risulta essere una striscia delimitata da un segmento e da due semirette che si estendono illimitatamente nella stessa direzione, ciascuna delle quali ha come estremità una di quelle del segmento; in particolare le rette possono essere ortogonali al segmento.

Punti notevoli

Ad ogni triangolo sono associati vari punti, ciascuno dei quali svolge un ruolo che, per qualche aspetto, lo qualifica come centrale per il triangolo stesso. Definiamo concisamente questi punti riferendoci ad un triangolo T i cui vertici denotiamo con A, B e C e i cui lati opposti denotiamo rispettivamente con a, b e c.

- ortocentro di T è l'intersezione delle sue altezze;
- baricentro o *centroide* di T è l'intersezione delle sue mediane;
- incentro di T è l'intersezione delle sue tre bisettrici, ovvero il centro dell'incerchio di T;
- circocentro di T è l'intersezione dei suoi tre assi, ovvero il centro della sua circonferenza circoscritta (vedi circumcerchio);
- excentro di T opposto a un suo vertice A è l'intersezione della sua bisettrice in A e delle due bisettrici esterne relative ai due vertici rimanenti B e C;
- punto di Bevan di T è il circocentro del triangolo excentrale di T;
- punto di Apollonio di T è l'intersezione dei tre segmenti che rispettivamente uniscono un vertice A di T con il punto nel quale l'excerchio di T opposto ad A è tangente al cerchio tangente ai tre excerchi di T;
- punto di Gergonne di T è l'intersezione dei tre segmenti che rispettivamente uniscono un vertice A di T con il punto nel quale il lato di T opposto ad A è tangente dell'incerchio di T;
- punto di Nagel di T è l'intersezione dei tre segmenti ciascuno dei quali unisce un vertice di T con il punto nel quale il suo lato opposto è tangente del corrispondente excerchio;
- punto di Fermat di T è l'intersezione dei tre segmenti ciascuno dei quali unisce un vertice A di T con il vertice non appartenente a T del triangolo equilatero uno dei cui lati è il lato a opposto ad A ed esterno a T;
- punto di Napoleone di T è l'intersezione dei tre segmenti che collegano ognuno un suo vertice A con il centro del triangolo equilatero costruito, esternamente a T, sul lato a opposto ad A;
- centro dei nove punti di T è il centro del cosiddetto cerchio dei nove punti (o cerchio di Feuerbach) di T; questi nove punti comprendono i tre punti medi dei lati di T, i tre piedi delle altezze di T, i punti medi dei tre segmenti ciascuno dei quali unisce un vertice di T con l'ortocentro di T.
- punto pedale di T è l'intersezione di ciascuna delle tre rette perpendicolari ai lati di T.
- punto ceviano di T è l'intersezione di tre rette ceviane.

Formulario

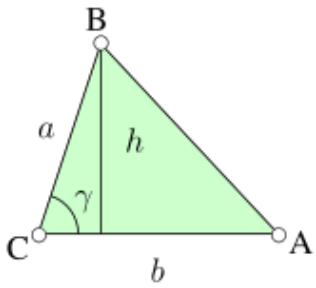
Formule trigonometriche

L'area di un triangolo può essere trovata per via trigonometrica. Usando le lettere della figura a destra, l'altezza $h = a \sin \gamma$. Sostituendo questo nella formula trovata precedentemente (per via geometrica), $S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$. L'area di un triangolo è quindi anche uguale al semiprodotto di due lati per il seno dell'angolo compreso.

Di conseguenza, per la nota identità $\sin x = \sin(\pi - x)$, l'area di un triangolo qualsiasi con i due lati a e b e l'angolo compreso γ, è uguale all'area del triangolo con gli stessi lati a e b ma con angolo compreso supplementare $(\pi - \gamma)$

L'area di un parallelogramma con due lati adiacenti a e b e angolo compreso γ è il doppio di quella del triangolo che ha gli stessi dati, cioè $ab \sin \gamma$.

Per risolvere il triangolo, cioè determinare la misura di tutti i lati ed angoli, dati due lati e l'angolo compreso fra di essi, o un lato e i due angoli adiacenti, si usano il teorema dei seni e il teorema del coseno, quest'ultimo meglio noto col nome di Carnot.



Si applica la trigonometria per trovare l'altezza h

L'area $\mathcal{A}$ del triangolo può essere misurata con la formula matematica:

$$\mathcal{A} = \frac{bh}{2},$$

dove b è la base e h l'altezza ad essa relativa, perché il triangolo va visto come la metà di un parallelogramma di base b e altezza h.

Alternativamente l'area del triangolo può essere calcolata con

$$\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

dove a, b e c sono i lati e p il semiperimetro (formula di Erone).

Formule analitiche

Consideriamo un triangolo ABC nel piano cartesiano individuato attraverso le coppie di coordinate dei vertici $(x_A, y_A), (x_B, y_B), (x_C, y_C)$.

La sua area $\mathcal{A}$ è data dall'espressione

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|x_A(y_B - y_C) - x_B(y_A - y_C) + x_C(y_A - y_B)\right|,$$

oppure con un'espressione che non utilizza il concetto di matrice

$$\mathcal{A} = \frac{\left|(y_B - y_A)(x_C - x_B) + (y_B - y_C)(x_B - x_A)\right|}{2},$$

e il suo perimetro $\mathcal{P}$ è dato da

$$\mathcal{P} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} + \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} + \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2}.$$

Geometrie non euclidee

Il concetto di triangolo si estende ed è ampiamente usato in tutte le geometrie non euclidee. Un triangolo in una geometria non euclidea si differenzia generalmente per il fatto che la somma dei suoi angoli interni non è 180°: questa somma è inferiore a 180° per ogni triangolo nel caso di una geometria iperbolica, mentre è superiore per ogni triangolo nel caso di una geometria ellittica.

Teoremi sui triangoli

I criterio di congruenza dei triangoli

Se due triangoli hanno rispettivamente congruenti due lati e l'angolo tra essi compreso, essi sono congruenti.

II criterio di congruenza dei triangoli

Se due triangoli hanno rispettivamente congruenti due angoli e il lato ad essi adiacente, essi sono congruenti.

III criterio di congruenza dei triangoli

Se due triangoli hanno rispettivamente congruente i tre lati, essi sono congruenti. Criterio generale di congruenza dei triangoli Se due triangoli hanno rispettivamente congruenti un lato e due angoli qualsiasi, essi sono congruenti.

I teorema dell'angolo esterno

In un triangolo ogni angolo esterno è maggiore di ciascuno degli angoli interni non adiacenti ad esso.

II teorema dell'angolo esterno

In un triangolo l'angolo esterno di uno di essi è uguale alla somma degli altri due angoli interni.

> Corollario 1: un triangolo non può avere né due angoli retti, né due angoli ottusi, né un angolo retto e uno ottuso, cioè un triangolo ha almeno due angoli acuti.
> Corollario 2: gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono acuti.

Disuguaglianza triangolare

In un triangolo ciascun lato è minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza.

I criterio di similitudine dei triangoli

Se due triangoli hanno due angoli rispettivamente congruenti, allora sono simili.

II criterio di similitudine dei triangoli

Se due triangoli hanno rispettivamente due lati proporzionali e l'angolo tra essi compreso congruente, allora sono simili.

III criterio di similitudine dei triangoli

Se due triangoli hanno i tre lati rispettivamente proporzionali, allora sono simili.

I teorema di Euclide

In un triangolo rettangolo ogni cateto è medio proporzionale tra l'ipotenusa e la sua proiezione sull'ipotenusa.

II teorema di Euclide

In un triangolo rettangolo l'altezza relativa all'ipotenusa è media proporzionale fra le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.

Teorema di Pitagora

In ogni triangolo rettangolo, il quadrato costruito sull'ipotenusa è uguale alla somma dei quadrati costruiti sui cateti.

Note

1. **^** Al libro *Topologia* di Marco Manetti (2014) viene fatta risalire la tradizione di definire scaleno un triangolo di cui non venga specificata la relazione tra i lati. Questo è diverso dal chiedere che i lati siano tutti diversi. Nella nuova terminologia infatti un triangolo isoscele verrà considerato scaleno.Tale definizione viene ritenuta preferibile a quella tradizionale da molti autori contemporanei.

Voci correlate

- *Encyclopedia of Triangle Centers*
- Triangolo di Reuleaux
- Teorema di Pitagora
- Trigonometria

Altri progetti

- Wikiquote contiene citazioni sul **triangolo**
- Wikizionario contiene il lemma di dizionario «**triangolo**»
- Wikimedia Commons (https://commons.wikimedia.org/wiki/?uselang=it) contiene immagini o altri file su **triangolo (https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Triangles?uselang=it)**

Collegamenti esterni

-
- (EN) *Triangolo*, su *Enciclopedia Britannica*, Encyclopædia Britannica, Inc.
- (EN) Eric W. Weisstein, *Triangolo*, su *MathWorld*, Wolfram Research.
- *Studio dei casi per la risoluzione di un triangolo*, su *cnuto.it*.
- (EN) Triangle (http://mathworld.wolfram.com/Triangle.html) in MacTutor
- (EN) Triangle Calculator (http://www.3eck.org/triangle/en/calculator_simple.php) - completes triangles when given three elements (sides, angles, area, height etc.), supports degrees, radians and grades.
- (EN) Napoleon's theorem (http://agutie.homestead.com/files/Napoleon0.htm) A triangle with three equilateral triangles. A purely geometric proof. It uses the Fermat point to prove Napoleon's theorem without transformations by Antonio Gutierrez from "Geometry Step by Step from the Land of the Incas"
- (EN) William Kahan: Miscalculating Area and Angles of a Needle-like Triangle (http://http.cs.berkeley.edu/~wkahan/Triangle.pdf).
- (EN) Clark Kimberling: Encyclopedia of triangle centers (http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html). Lists some 1600 interesting points associated with any triangle.
- (EN) Christian Obrecht: Eukleides (https://web.archive.org/web/20060414004443/http://perso.wanadoo.fr/obrecht/). Software package for creating illustrations of facts about triangles and other theorems in Euclidean geometry.
- (EN) Triangle constructions, remarkable points and lines, and metric relations in a triangle (https://www.cut-the-knot.org/triangle) at cut-the-knot

- (EN) *Printable Worksheet on Types of Triangles*, su *kwiznet.com*. URL consultato il 23 novembre 2019 (archiviato dall'url originale il 15 dicembre 2018).
- (EN) Compendium Geometry (http://www.vias.org/comp_geometry/geom_triangle.html) Analytical Geometry of Triangles
- P. Baroncini - R. Manfredi, *MultiMath.blu - Geometria*, DeAScuola, 2014, ISBN 978-88-538-0567-6

Controllo di autorità	Thesaurus BNCF 38738 (https://thes.bncf.firenze.sbn.it/termine.php?id=38738) · LCCN (EN) sh85137407 (http://id.loc.gov/authorities/subjects/sh85137407) · BNF (FR) cb11946969k (https://catalogue.bnf.fr/ark:/12148/cb11946969k) (data) (https://data.bnf.fr/ark:/12148/cb11946969k) · J9U (EN, HE) 987007548775205171 (http://uli.nli.org.il/F/?func=find-b&local_base=NLX10&find_code=UID&request=987007548775205171)

Estratto da "https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Triangolo&oldid=133115454"

Questa pagina è stata modificata per l'ultima volta il 21 apr 2023 alle 15:56.

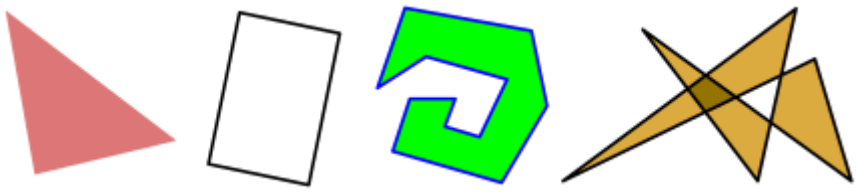
Il testo è disponibile secondo la licenza Creative Commons Attribuzione-Condividi allo stesso modo; possono applicarsi condizioni ulteriori. Vedi le condizioni d'uso per i dettagli.

Poligono

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

*Disambiguazione – Se stai cercando altri significati, vedi **Poligono (disambigua)**.*

In geometria un **poligono** (dal greco πολύς (polys, "molti") e γωνία (gōnia, "angolo") è una figura geometrica piana delimitata da una linea spezzata chiusa. I segmenti che compongono la spezzata chiusa si chiamano lati del poligono e i punti in comune a due lati consecutivi si dicono vertici del poligono.



Alcuni poligoni: i primi due sono *convessi*, il terzo è *concavo*, il quarto è *intrecciato* e stellato e concavo

Indice

- **Definizione**
- **Sulla parte delimitata**
- **Classificazione**
  - Numero di lati
  - Convessità
  - Simmetria con uguaglianza
- **Proprietà**
  - Angoli
  - Area
- **Nomi di poligono**
- **Voci correlate**
- **Altri progetti**
- **Collegamenti esterni**

Definizione

Una definizione di poligono è la seguente.

> Un **poligono** è la parte di piano delimitata da una linea spezzata chiusa.

Ricordiamo che una linea spezzata è l'insieme finito e totalmente ordinato di segmenti, detti lati, che sono ordinatamente consecutivi e ordinatamente non adiacenti. Una linea spezzata è *chiusa* quando il secondo estremo dell'ultimo segmento coincide con il primo estremo del primo. Una linea spezzata è *semplice* (o *non intrecciata*) se due lati non successivi, secondo l'ordinamento assegnato, non si intersecano (a parte il primo e l'ultimo lato che possono avere in comune rispettivamente il primo e il secondo estremo).

Il punto in comune a due lati consecutivi è detto *vertice*.

Sulla parte delimitata

Il fatto che una linea spezzata chiusa non intrecciata delimiti effettivamente una porzione di piano è, per quanto intuitivo, un risultato non banale della geometria piana: si tratta di una conseguenza del teorema della curva di Jordan.

Una definizione costruttiva è la seguente: un punto P del piano appartiene al poligono se (con al più un numero finito di eccezioni) tutte le semirette uscenti da P intersecano la spezzata in un numero finito e dispari di punti distinti.

Classificazione

Numero di lati

Una prima classificazione di un poligono riguarda il suo numero di lati (vedi i nomi di poligono).

Convessità

Un poligono è:

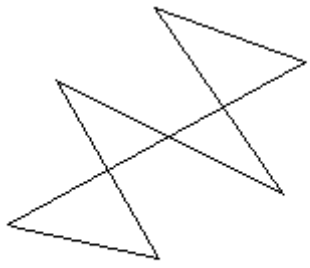
semplice
: se i lati del poligono non si intersecano.

complesso (o intrecciato)
: se non è semplice.

Un poligono semplice è:

convesso
: se ogni angolo interno è minore o uguale ad un angolo piatto (o, equivalentemente, se il prolungamento immaginario di ogni segmento che congiunge due suoi vertici va al di fuori del poligono).

concavo
: se anche un solo angolo interno è maggiore di $180°$ (o, equivalentemente, se il prolungamento immaginario di uno o più segmenti cade all'interno del poligono).



Un poligono intrecciato.

Simmetria con uguaglianza

In base alla simmetria, un poligono è:

equilatero

se tutti i suoi lati sono uguali.

equiangolo
: se tutti i suoi angoli sono uguali.

ciclico
: se tutti i suoi vertici giacciono su un'unica circonferenza.

regolare
: se è convesso, equilatero ed equiangolo (o, equivalentemente, se è ciclico ed equilatero).

irregolare
: se non è regolare.

Proprietà

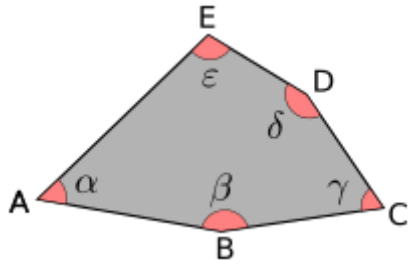
Angoli

La somma degli angoli interni di un poligono è pari a tanti angoli piatti quanti sono i suoi lati (n), meno due

$$180^\circ \times (n-2).$$

Ad esempio, il poligono in figura ha cinque lati, e quindi:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = (5-2) \times 180^\circ = 540^\circ.$$



Un poligono irregolare

La dimostrazione può essere svolta per induzione: in un triangolo la somma degli angoli è 180°, e preso un qualunque poligono una sua diagonale lo divide in due altri poligoni con un numero minore di lati, per cui si può far valere l'ipotesi induttiva.

La somma degli angoli esterni di un poligono convesso con n lati è uguale a

$$(360^\circ \times n) - [180^\circ \times (n-2)] = 180^\circ \times (n+2).$$

In quanto la somma di tutti gli angoli esterni ed interni è, evidentemente, uguale a n volte un angolo giro: sottraendo al totale la somma di quelli interni, avremo la somma di quelli esterni.

Area

Con la formula dell'area di Gauss è possibile calcolare l'area di un poligono con n vertici aventi coordinate cartesiane $(x_i; y_i)_{i=1,\ldots,n}$ nel modo seguente:

$$A = \frac{1}{2}\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_{i+1} - \sum_{i=1}^{n} x_{i+1} y_i\right|$$

con la convenzione che $(x_{n+1}; y_{n+1}) = (x_1; y_1)$.

Con questa formula possiamo ricavare una superficie di una qualsiasi figura piana attraverso le coordinate dei suoi vertici. È una formula molto utilizzata nella topografia e nella trigonometria.

Nomi di poligono

Distinzione in base al numero di lati e, quindi, di angoli:

N° lati	Nome
3	Triangolo
4	Quadrilatero
5	Pentagono
6	Esagono
7	Ettagono
8	Ottagono
9	Ennagono
10	Decagono
11	Endecagono
12	Dodecagono
13	Tridecagono
14	Tetradecagono
15	Pentadecagono
16	Esadecagono
17	Eptadecagono
18	Ottadecagono
19	Ennadecagono
20	Icosagono
21	Endeicosagono
22	Doicosagono
23	Triaicosagono
24	Tetraicosagono
25	Pentaicosagono
26	Esaicosagono

Voci correlate

- Poligono iperbolico
- Poligono regolare
- Poligono stellato
- Poliedro
- Politopo

Altri progetti

- Wikimedia Commons (https://commons.wikimedia.org/wiki/?uselang=it) contiene immagini o altri file su **poligono (https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Polygons?uselang=it)**

- Problemi di geometria piana su Wikiversity

Collegamenti esterni

-
- (EN) *Poligono*, su *Enciclopedia Britannica*, Encyclopædia Britannica, Inc.
- (EN) Eric W. Weisstein, *Poligono*, su *MathWorld*, Wolfram Research.
- (EN) *Poligono*, su *Encyclopaedia of Mathematics*, Springer e European Mathematical Society.
- (FR) poligoni, poliedri e politopi (http://www.mathcurve.com/polyedres/polyedres.shtml) da *Mathcurve*, *Encyclopédie des formes Mathématiques remarquables*

Controllo di autorità	Thesaurus BNCF 6803 (https://thes.bncf.firenze.sbn.it/termine.php?id=6803) · LCCN (EN) sh85104637 (http://id.loc.gov/authorities/subjects/sh85104637) · GND (DE) 4175197-8 (https://d-nb.info/gnd/4175197-8) · BNF (FR) cb12266998h (https://catalogue.bnf.fr/ark:/12148/cb12266998h) (data) (https://data.bnf.fr/ark:/12148/cb12266998h) · J9U (EN, HE) 987007563260005171 (http://uli.nli.org.il/F/?func=find-b&local_base=NLX10&find_code=UID&request=987007563260005171)

Estratto da "https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Poligono&oldid=132417927"

Questa pagina è stata modificata per l'ultima volta il 9 mar 2023 alle 15:08.

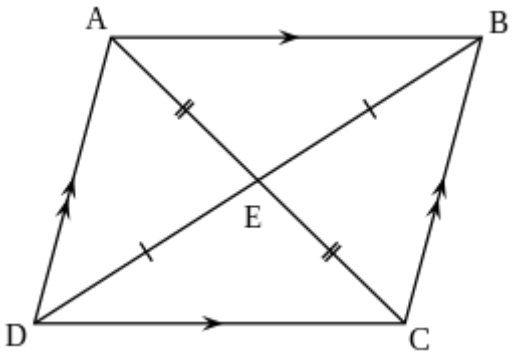
Il testo è disponibile secondo la licenza Creative Commons Attribuzione-Condividi allo stesso modo; possono applicarsi condizioni ulteriori. Vedi le condizioni d'uso per i dettagli.

WIKIPEDIA

Parallelogramma

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

Per la geometria euclidea, un **parallelogramma** (o **parallelogrammo**) è un quadrilatero con i lati opposti paralleli. I lati e gli angoli opposti di un parallelogramma sono congruenti.



Un esempio di parallelogramma

La congruenza dei lati e degli angoli opposti è una diretta conseguenza del V postulato di Euclide, relativo agli angoli interni determinati da una retta che ne taglia due, e nessuna delle caratteristiche del quadrilatero può essere dimostrata senza ricorrere al postulato di Euclide o a una delle sue formulazioni equivalenti.

L'etimologia, dal greco παραλληλ-όγραμμον, una forma "di linee parallele", riflette la definizione.

Il parallelogramma è un caso particolare di trapezio. Il parallelogramma ha due possibili altezze, secondo quale lato viene considerato come base.

Indice

Tipologie
Proprietà e criteri
Formula per l'area
Voci correlate
Altri progetti
Collegamenti esterni

Tipologie

- **Quadrato** - parallelogramma equilatero ed equi-angolo.
- **Rettangolo** - parallelogramma equiangolo.
- **Rombo** - parallelogramma equilatero.
- **Romboide**, parallelogramma che non è né un rombo né un rettangolo.

Dalle definizioni illustrate precedentemente è affermabile che:

- un quadrato è sempre sia un rettangolo che un rombo, mentre un rombo o un rettangolo non necessariamente sono quadrati.

Proprietà e criteri

- Un quadrilatero è un parallelogramma se e solo se le sue diagonali si bisecano, cioè ciascuna divide l'altra in due segmenti congruenti.
- Un quadrilatero è un parallelogramma se e solo se tutte le coppie di angoli interni consecutivi sono costituite da angoli supplementari.
- Un quadrilatero è un parallelogramma se e solo se le due coppie di angoli interni opposti sono costituite da angoli congruenti.
- Un quadrilatero è un parallelogramma se e solo se ha due lati opposti paralleli e congruenti.

La legge del parallelogramma caratterizza gli spazi di Hilbert nell'ambito degli spazi di Banach.

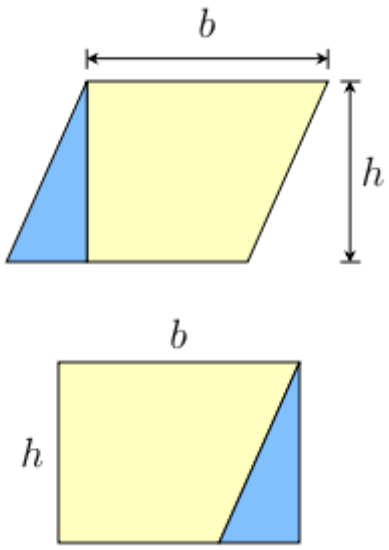
Ogni parallelogramma consente di costruire una tassellazione del piano.

La figura solida corrispondente tridimensionale del parallelogramma è il parallelepipedo.

Formula per l'area

Un parallelogramma con base b e altezza h può essere diviso in un trapezoide e un triangolo retto, per essere ricombinato in un rettangolo, come mostrato nella figura a destra. Questo significa che l'area di un parallelogramma è la stessa di quella di un rettangolo con identica base e altezza:

$$A = b \times h.$$



Un parallelogramma può essere ridisposto in un rettangolo con la medesima area.

Voci correlate

- Parallelepipedo

Altri progetti

- Wikizionario contiene il lemma di dizionario «**parallelogramma**»
- Wikimedia Commons (https://commons.wikimedia.org/wiki/?uselang=it) contiene immagini o altri file su **parallelogramma (https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Parallelograms?uselang=it)**

Collegamenti esterni

- (EN) Parallelogramma (http://mathworld.wolfram.com/Parallelogram.html) in MathWorld
- (EN) *Area of Parallelogram*, su *cut-the-knot.org*.
- (EN) *Equilateral Triangles On Sides of a Parallelogram*, su *cut-the-knot.org*.
- (EN) *Varignon Parallelogram*, su *cut-the-knot.org*.
- (EN) *Wittenbauer's Parallelogram*, su *cut-the-knot.org*.

- (EN) Varignon and Wittenbauer Parallelograms (http://agutie.homestead.com/files/VarigWitten.htm) by Antonio Gutierrez from "Geometry Step by Step from the Land of the Incas"
- (EN) Van Aubel's theorem (http://agutie.homestead.com/files/vanaubel.html) Quadrilateral with four squares by Antonio Gutierrez from "Geometry Step by Step from the Land of the Incas"
- (EN) Parallelogram with five squares (http://agutie.homestead.com/files/parallelogram_squares.htm) by Antonio Gutierrez from "Geometry Step by Step from the Land of the Incas"

Estratto da "https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Parallelogramma&oldid=130014091"

Questa pagina è stata modificata per l'ultima volta il 19 ott 2022 alle 17:05.

Il testo è disponibile secondo la licenza Creative Commons Attribuzione-Condividi allo stesso modo; possono applicarsi condizioni ulteriori. Vedi le condizioni d'uso per i dettagli.